

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} , paire et de période T ($T > 0$), telle que, sur $\left[0; \frac{T}{4}\right]$, $f(t) = \frac{4kt}{T}$ et sur $\left[\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right]$, $f(t) = k$, où k est un réel strictement positif. On note S_f la série de Fourier associée à f .

1. Représenter ci-dessous la fonction f sur $[-T; 2T]$.	2. Ecrire (<u>sans justification</u>) ci-dessous a_0 sous forme fractionnaire « simplifiée ».	3. Ecrire (<u>sans justification</u>) ci-dessous b_n sous forme fractionnaire « simplifiée ».

4. Présenter un calcul justifié prouvant que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{4k}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right)$.

5. Citer le (ou les) théorème(s) permettant d'affirmer que pour tout t , $f(t) = S_f(t)$ où S_f est la série de Fourier associée à f .	
6. La fonction g est la troncature de S_f pour $n \leq 4$. Ecrire $g(t)$ sous forme développée et réduite.	

7. (en utilisant le dos de cette feuille en cas de besoin) Prouver que, pour tout t , $f(t) = \frac{3k}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$ avec, pour tout entier naturel p non nul, $A_{4p} = 0$, $A_{2p+1} = \frac{4k}{\pi^2(2p+1)^2}$ et $A_{4p+2} = \frac{8k}{\pi^2(4p+2)^2}$.

Exercice 2

L'étude d'un mouvement amorti à considérer la fonction causale f vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$f'(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t} \text{ pour } t \geq 0, \text{ et } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

On suppose que la fonction f et ses dérivées admettent des transformées de Laplace, et on note F la transformée de f .

1. En citant clairement les propriétés et théorèmes utilisés, prouver que $(p^2 + 2p + 2) F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{p + 1}$.

2. Ecrire, sous forme de fractions irréductibles, les réels a , b et c tels que pour tout réel $p \neq -1$ on ait : $\frac{p^2 + 3p + 3}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2 + 2p + 2}$.

3. Soit k une constante non nulle.

- a) Ecrire la fonction causale g , originale de la fonction G où $G(p) = \frac{k}{p^2 + 2p + 2}$
- b) Ecrire les théorèmes utilisés pour répondre à la question a).
- c) Ecrire $G(p)$ sous une forme adaptée à l'utilisation des théorèmes cités en b).

4. Présenter alors un calcul de $f(t)$.

Éléments pour un corrigé

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} , paire et de période T ($T > 0$), telle que, sur $\left[0; \frac{T}{4}\right]$, $f(t) = \frac{4kt}{T}$ et sur $\left[\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right]$, $f(t) = k$, où k est un réel strictement positif. On note S_f la série de Fourier associée à f .

1. Représenter ci-dessous la fonction f sur $[-T; 2T]$.	2. Ecrire (sans justification) ci-dessous a_0 sous forme fractionnaire « simplifiée ».	3. Ecrire (sans justification) ci-dessous b_n sous forme fractionnaire « simplifiée ».
	$\frac{3k}{4}$	0

4. Présenter un calcul justifié prouvant que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{4k}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right)$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

définition de f ↓ relation de Chasles, linéarité de l'intégration

$$a_n = \frac{4}{T} \left[\frac{4k}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} t \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt + k \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right]$$

↓ th.3 (IPP), th.4

$$a_n = \frac{4}{T} \left[\frac{4k}{T} \left(\frac{T}{2n\pi} \left[t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_0^{\frac{T}{4}} - \frac{T}{2n\pi} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right) + \frac{kT}{2n\pi} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right]$$

↓

$$a_n = \frac{4}{T} \left[\frac{4k}{T} \left(\frac{T}{2n\pi} \left[\frac{T}{4} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 \right] - \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_0^{\frac{T}{4}} \right) + \frac{kT}{2n\pi} \left[\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \right]$$

↓ th.5

$$a_n = \frac{4}{T} \left[\frac{kT}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{kT}{n^2 \pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right] - \frac{kT}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

↓ th.5

$$a_n = \frac{4k}{n^2 \pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right]$$

Th.1 : si f est T -périodique alors le coefficient de Fourier a_n est tel que, pour tout $n \geq 1$, $a_n =$

$\frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$ où α est une constante quelconque, et ω le réel tel que $\omega T = 2\pi$.

Th.2 : si f est intégrable et paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

Th.3 (IPP) :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Th.4 : $(\sin(ax))' = a \cos(ax)$

$(\cos(ax))' = -a \sin(ax)$

Th.5 (lignes trigonométriques)

Pour entier n , $\sin(n\pi) = 0$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

5. Citer le (ou les) théorème(s) permettant d'affirmer que pour tout t , $f(t) = S_f(t)$ où S_f est la série de Fourier associée à f .	Th.6 (dit de Dirichlet) : soit f T -périodique et S_f sa série de Fourier si f est continue et dérivable sur $[\alpha; \alpha + T]$ sauf en un nombre fini de points où f et f' ont des limites finies à gauche et à droite, alors, pour tout t où f est continue $S_f(t) = f(t)$
6. La fonction g est la troncature de S_f pour $n \leq 4$. Ecrire $g(t)$ sous forme développée et réduite.	$g(t) = \frac{3k}{4} - \frac{4k}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{2k}{\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) - \frac{4k}{9\pi^2} \cos\left(\frac{6\pi}{T} t\right)$

7. (en utilisant le dos de cette feuille en cas de besoin) Prouver que, pour tout t , $f(t) = \frac{3k}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right)$ avec,

$$\text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul, } A_{4p} = 0, A_{2p+1} = \frac{4k}{\pi^2 (2p+1)^2} \text{ et } A_{4p+2} = \frac{8k}{\pi^2 (4p+2)^2}.$$

En utilisant 2), 3), 4) et 5), $f(t) = S_f(t) = \frac{3k}{4} +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\text{Or } \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{th.7,8}}{=} -\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Th.7 : pour tous a et b réels,
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

th.8 : $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Eléments pour un corrigé

$$\text{donc } f(t) = \frac{3k}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4k}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Si $n = 4p$ (non nul)

$$\text{alors } -\frac{4k}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) = -\frac{4k}{\pi^2 (4p)^2} (\cos(2p\pi) - 1) \stackrel{\text{th.5}}{=} 0 = A_{4p},$$

si $n = 2p + 1$ (non nul)

$$\begin{aligned} \text{alors } -\frac{4k}{\pi^2 (2p+1)^2} \left(\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) - 1 \right) &= -\frac{4k}{\pi^2 (2p+1)^2} \left(\cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \\ &\stackrel{\text{th.9,5}}{=} -\frac{4k}{\pi^2 (2p+1)^2} (-\sin(p\pi) - 1) = A_{2p+1}, \end{aligned}$$

si $n = 4p + 2$ (non nul)

$$\begin{aligned} \text{alors } -\frac{4k}{\pi^2 (4p+2)^2} \left(\cos\left(\frac{(4p+2)\pi}{2}\right) - 1 \right) &= -\frac{4k}{\pi^2 (4p+2)^2} (\cos(2p\pi + \pi) - 1) \\ &\stackrel{\text{th.10,5}}{=} -\frac{4k}{\pi^2 (2p+1)^2} (-\cos(2p\pi) - 1) = A_{4p+2}. \end{aligned}$$

Th.9 : pour tout a réel, $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$

Th.10 : pour tout a réel, $\cos(a + \pi) = -\cos a$

Eléments pour un corrigé

Exercice 2

L'étude d'un mouvement amorti à considérer la fonction causale f vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t} \text{ pour } t \geq 0, \text{ et } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

On suppose que la fonction f et ses dérivées admettent des transformées de Laplace, et on note F la transformée de f .

1. En citant clairement les propriétés et théorèmes utilisés, prouver que $(p^2 + 2p + 2) F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{p + 1}$.

$$f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t} \text{ pour } t \geq 0, \text{ et } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0$$

↓ th.1,2,3,4,5

$$(p^2 F(p) - p) + 2(pF(p) - 1) + 2F(p) = \frac{1}{p + 1}$$

↓

$$(p^2 + 2p + 2) F(p) = p + 2 + \frac{1}{p + 1}$$

↓

$$(p^2 + 2p + 2) F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{p + 1}.$$

$$\text{Th.1 : } f(t)U(t) = g(t)U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = G(p)$$

Th.2 : \mathcal{L} est linéaire

$$\text{Th.3 : } f'(t)U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\text{Th.3 : } f(t)U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0^+)$$

$$\text{Th.4 : } e^{-at}U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p + a}$$

2. Ecrire, sous forme de fractions irréductibles, les réels a , b et c tels que

$$a = 1, b = 0 \text{ et } c = 1$$

pour tout réel $p \neq -1$ on ait : $\frac{p^2 + 3p + 3}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p + 1} + \frac{bp + c}{p^2 + 2p + 2}.$

3. Soit k une constante non nulle.

a) Ecrire la fonction causale g , originale de la fonction G où $G(p) = \frac{k}{p^2 + 2p + 2}$

$$k \sin t e^{-t} U(t).$$

- b) Ecrire les théorèmes utilisés pour répondre à la question a).

Par exemple : Th.5 : \mathcal{L}^{-1} est linéaire ; Th.6 : $\frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin(\omega t)U(t)$

Th.7 : $F(p + a) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)e^{-at}U(t)$

- c) Ecrire $G(p)$ sous une forme adaptée à l'utilisation des théorèmes cités en b).

$$k \frac{1}{(p + 1)^2 + 1}$$

4. Présenter alors un calcul de $f(t)$.

De 1., 2. On tire : $F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{p + 1} + \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$

↓ th.8, q.3b)

$$f(t) = e^{-t} U(t) + \sin t e^{-t} U(t).$$

$$\text{Th.8 : } \frac{1}{p + a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}U(t)$$