

Exercice 1 (5 points)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$A(1,1,0)$, $B(-1,0,0)$ et $C(0,0,1)$

- 1) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. En déduire l'aire du triangle ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.
- 2) Soit P le plan d'équation $x - 2y - z + 1 = 0$.
a) Calculer la distance entre P et le point $\Omega(2, -2, 1)$.
b) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre Ω et tangente à P.
- 3) Soit l'ensemble $S_m = \{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4my - 2mz + 8m^2 - m - 4 = 0\}$.
a) Montrer que pour tout réel m S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et de rayon R_m .
b) Déterminer l'ensemble Δ des points I_m lorsque m décrit \mathbb{R} .
c) Montrer que S_0 coupe P suivant un cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 (5 points)

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 + 2x + \ln x$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g.
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $0,2 < \alpha < 0,3$.
b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

B) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{2x+1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter ce résultat graphiquement.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.
b) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
- 3) a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Construire la courbe (C_f) de f.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3e^x + 1}{1 + e^x}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in]1, 3[$.

3) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C).

4) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

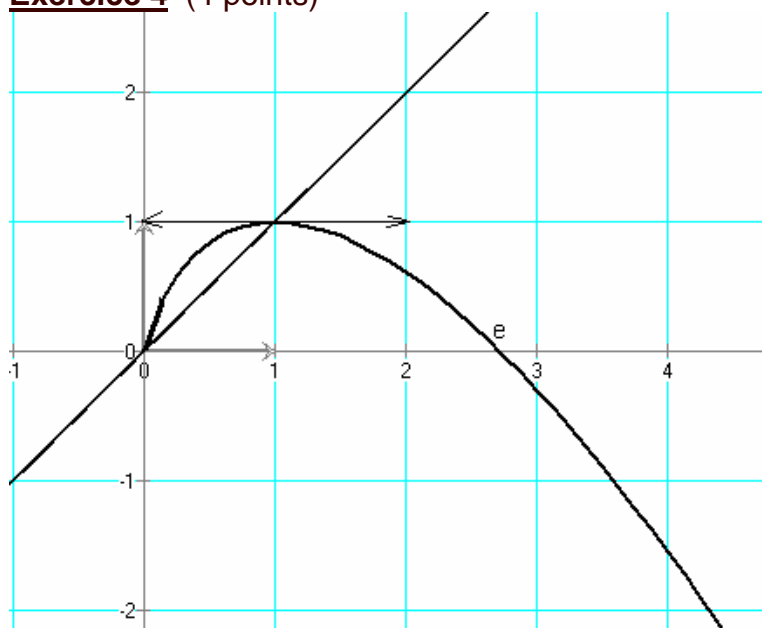
5) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |3 - \alpha|$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4 (4 points)



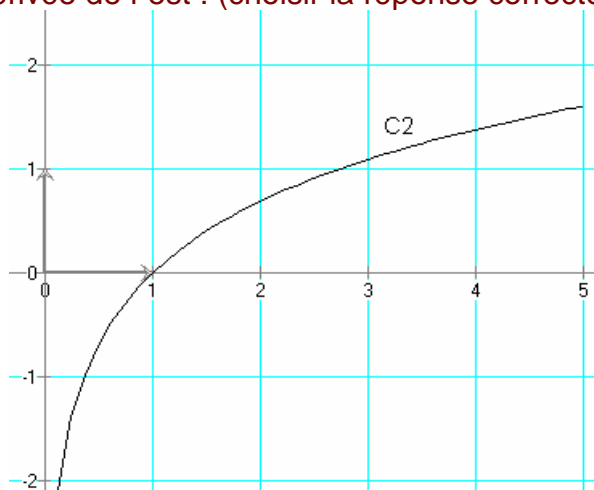
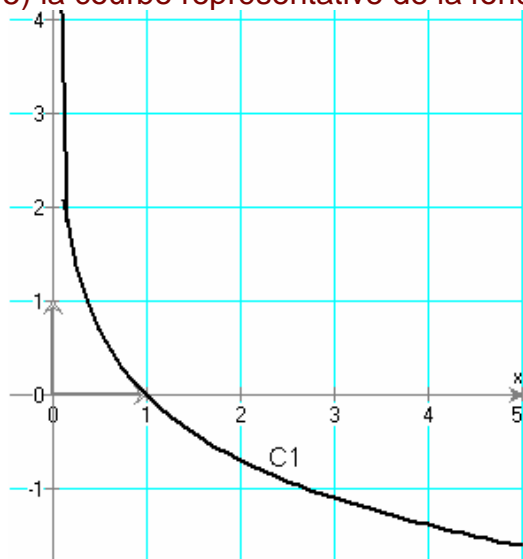
On considère la courbe (C) représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$

- La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
- La courbe passe par l'origine $O(0,0)$ et admet en ce point une tangente verticale dirigée vers le haut

- 1) Utiliser le graphique pour donner les valeurs de $f(1)$; $f'(1)$ et $f(e)$
- 2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 3) Résoudre graphiquement les trois inéquations ci-dessous
 (1) : $f(x) \geq 0$ (2) : $f'(x) \geq 0$ (3) : $f(x) \leq x$.

4) Dresser le tableau de variation de f .

5) la courbe représentative de la fonction dérivée de f est : (choisir la réponse correcte)



6) Soit g la restriction de f à $[1, +\infty[$.

- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .
 - b) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe C_g de g et $C_{g^{-1}}$ de g^{-1}
- 7) On admet que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = x(a + b \log x)$ où a et b sont deux nombres réels.
- a) Montrer que pour tout x élément de $]0, +\infty[$: $f'(x) = a + b(1 + \log x)$
 - b) À l'aide des valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$, calculer a et b .