Jeudi 14 mai 2009.

DS de Mathématiques. TS1 et TS2.
4 heures. Calculatrice autorisée.

EXERCICE 1. 5 points.

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $1-\ln(x+3) \geq 0$.

1b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

2a. Justifier que, si $n \leq x \leq n + 1$, alors $f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$.

2b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n : $f(n + 1) \leq u_n \leq f(n)$.

2c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur [0 ; +∞[par $F(x) = (\ln(x + 3))^2$.

3a. Justifier la dérivabilité sur [0 ; +∞[de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre F'(x).

3b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

Exprimer I_n en fonction de n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

Calculer S_n. La suite (S_n) est−elle convergente ?

EXERCICE 2. 5 points.

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note : D l'évènement « le composant est défectueux »

F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur »

F_2 l'évènement « le composant provient du deuxième fournisseur »

1a. Dessiner un arbre pondéré.

1b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

1c. Le responsable du magasin découvre qu'un de ses composants est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. Des études montrent que la durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

3a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.

3b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

3c. Le responsable du magasin vérifie les composants. Il constate que l'un d'entre eux fonctionne depuis 3 ans.

Quelle est la probabilité que ce composant dure plus de 8 ans ?

EXERCICE 3. 2 points.

<u>*ROC.*</u>

Soit k et n deux entiers, avec $0 \leq k \leq n$: prouver que $\dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

<u>*Prise d'initiatives.*</u>

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces. Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois le six soit supérieure à 99% ?

EXERCICE 4. 3 points.

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y'+\left(1+\tan x\right)y=\cos x$,

(E_0) : $y'+y=1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

2a. Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f\left(x\right)=g\left(x\right)\cos x$.

Démontrer que la fonction *f* est solution de (E) si et seulement si la fonction *g* est solution de (E_0).

2b. Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 5. 5 points (non spé)

Partie A

1. Déterminer le complexe α tel que $\begin{cases}\alpha\left(1+i\right)=1+3i\\ i\alpha^2=-4+3i\end{cases}$.

2. Pour tout nombre complexe *z*, on pose $f\left(z\right)=z^2-\left(1+3i\right)z+\left(-4+3i\right)$. Montrer que $f\left(z\right)$ s'écrit sous la forme $\left(z-\alpha\right)\left(z-i\alpha\right)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f\left(z\right)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$. Placer *A* et *B* dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

Montrer que $b=ia$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point *C* d'affixe $c=-1+\frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point *D* tel que le triangle *OCD* soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de *D* à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit *M* le milieu du segment [*BC*]. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}=\frac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM=\frac{1}{2}DA$.

6. On appelle *J*, *K* et *L* les milieux respectifs des segments [*CD*], [*DA*] et [*AB*].
On admet que le quadrilatère *JKLM* est un parallélogramme, démontrer que c'est un carré.

EXERCICE 6. 5 points.

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie si vous la pensez vraie, un contre-exemple sinon. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe *z* associe le point d'affixe *z*' définie par : $z'=2iz+1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre *A* d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note *S* la surface d'équation $z=x^2+2x+y^2+1$.

Proposition 2 : « La section de *S* avec le plan d'équation *z* = 5 est un cercle de centre *A* de coordonnées (−1 ; 0 ; 5) et de rayon 5 ».

3. Proposition 3 : « $5^{750}-1$ est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel *n* est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de 3*n* +4 et de 4*n* +3 est égal à 7 ».

5. Soient *a* et *b* deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que *au*+*bv* = 2 alors le PGCD de *a* et *b* est égal à 2 ».

Corrigé du DS de Mathématiques
4 heures. Calculatrice autorisée.

EXERCICE 1. 5 points.

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(x) = $\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1a. On a $1-\ln(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+3)\leq 1 \overset{\exp\nearrow}{\overbrace{\Leftrightarrow}} x+3\leq e \Leftrightarrow x\leq e-3$.
Mais comme cette inéquation est définie pour $x>-3$, on trouve que $S=]-3;e-3]$.

1b. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+3}(x+3)-\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$.

Comme e – 3 < 0, la question 1a conduit au tableau de variations suivant :

x	2	+ ∞
f '(x)	0 -	
f (x)	$\dfrac{\ln(3)}{3}$ ↘	0

Calcul de la limite : posons X = x + 3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$; mais d'après les résultats de croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}=0$ d'où par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

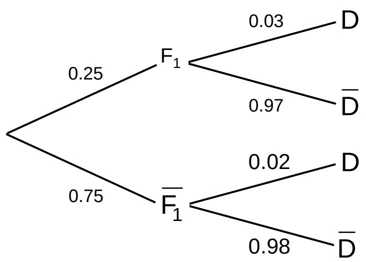
2a. n est positif et comme donc f décroit sur [n ;n+1]. Par conséquent, si n ≤ x ≤ n + 1, alors f(n + 1) ≤ f(x) ≤ f(n).
2b. f étant continue, on peut passer à l'intégrale l'encadrement précédent. Comme l'intégration conserve l'ordre, on a pour tout entier naturel n : $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq u_n \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$ cad $f(n+1)\int_n^{n+1} dx \leq u_n \leq f(n)\int_n^{n+1} dx$. Puisque $\int_n^{n+1} dx=[x]_n^{n+1}=1$, on a bien $f(n+1)\leq u_n \leq f(n)$.
2c. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (A1b) on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

3. Soit F la fonction définie sur [0 ; +∞[par F(x) = (ln(x + 3))².
3a. F est dérivable comme composée des fonctions carré et ln(x+3) : on a $F'(x)=2\times\dfrac{1}{x+3}\ln(x+3)=2f(x)$.
3b. $\dfrac{F}{2}$ est donc une primitive de f et on a $I_n=\dfrac{1}{2}[F]_0^n=\dfrac{F(n)-F(0)}{2}$

4. On a $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \int_0^1 f+\int_1^2 f+\ldots+\int_{n-1}^n f \overset{Chasles}{\overbrace{=}} \int_0^n f(x)dx=I_n$.
Vu que $S_n=I_n=\dfrac{F(n)-F(0)}{2}$ et que F tend clairement vers $+\infty$ en $+\infty$, S_n diverge aussi vers $+\infty$.

EXERCICE 2. 5 points.

1a. Voici l'arbre pondéré associé à la situation :



1b. On a $p(D\cap F_1)=p(F_1)\,p_{F_1}(D)=0.25\times 0.03=0.75\%$.
Puisque F_1 et $\overline{F_1}$ forment une partition, d'après la formule des probabilités totales on a $p(D)=p(F_1\cap D)+p(F_2\cap D)=0.0075+0.75\times 0.02=0.0225$.

1c. On cherche $p_D(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \frac{0.75\%}{2.25\%} = \frac{1}{3}$.

2. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux. La commande des 20 produits peut se modéliser par la répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli, dont le succès (être défectueux) est de probabilité 0.0225.
Y suit donc une loi binomiale de paramètres n = 20, p = 0.0225.
Ainsi $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - p^0(1-p)^{20} - 20p(1-p)^{19} \approx 0.074$.

3a. Une loi exponentielle est de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}^+$: par conséquent, $p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - \int_0^t f(x)dx = ... = e^{-\lambda t}$.

Pour notre cas cela donne, $0.325 = e^{-5\lambda} \Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0.325) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0.325)}{-5} \approx 0.225$.

3b. D'après les calculs précédents, on a $p(X \geq 8) = e^{-8\lambda} \approx 0.835$ et $p(X \leq 8) = 1 - p(X \geq 8) = 0.165$

3c. La probabilité cherchée est $p_{X>3}(X > 8)$: une loi exponentielle étant à durée de vie sans vieillissement, on a $p_{X>3}(X > 8) = p(X > 5) = 0.325$ d'après l'énoncé.

EXERCICE 3. 2 points.

ROC.

Par définition $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$. Mais $n(n-1)! = n!$ et $k(k-1)! = k!$ d'où $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Prise d'initiatives.
> Soit S l'évènement « obtenir un six (à un lancé) » : le lancé d'un dé de succès S est alors une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.
> Répétons n fois ce lancé : il s'agit alors d'un schéma de Bernoulli puisque les lancés s'effectuent avec le même dé (épreuves identiques) et peuvent supposés naturellement indépendants.
> Si x désigne la va qui compte le nombre de succès, X suit alors une loi binomiale B(n, $\frac{1}{6}$).

Nous cherchons alors n tel que $p(X \geq 1) \geq 0.99 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0.99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.99 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.01$.

Ln étant croissante, et ln(5/6) étant négatif, on trouve que $n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(5/6)} \approx 25.2$ et donc on doit effecteur au moins 26 lancés.

EXERCICE 4. 3 points.

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$,
(E$_0$) : $y' + y = 1$.

1. $(E_o) : y' = -y + 1$: les solutions de cette équations sont les fonctions définies sur I par $g(x) = Ke^{-x} + 1$ où $K \in \mathbb{R}$.

2a. Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Calculons avant tout $f' + (1 + \tan)f$: on obtient $f' + (1 + \tan)f = g'\cos - g\sin + (1 + \tan)g\cos = ... = g'\cos + g\cos$.

Par conséquent, f est solution de (E) ssi $g'\cos + g\cos = \cos \overset{\cos \neq 0 \ sur\ I}{\overbrace{\Leftrightarrow}} g' + g = 1 \Leftrightarrow g \ solution \ de \ E_0$.

2b. A l'aide de la question 1, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = \left(Ke^{-x} + 1\right)\cos x,\ K \in \mathbb{R}$.

Remarque : en fait, on a seulement prouvé dans cet exercice que ces fonctions sont <u>des</u> solutions, mais pas <u>les</u> solutions.

EXERCICE 5. 5 points (non spé)

<u>Partie A</u>

1. La première équation donne $\alpha = \dfrac{1+3i}{1+i} = .. = 2+i$. Par ailleurs $i\alpha^2 = i(2+i)^2 = .. = -4+3i$ donc la seconde équation est vérifiée.

2. Développons le membre de gauche : $(z-\alpha)(z-i\alpha) = z - \underbrace{(1+i)}_{1+3i}\alpha + i\underbrace{\alpha^2}_{-4+3i} = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i) = f(z)$

Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont donc les complexes α *et* $i\alpha$.

<u>Partie B</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1.

> $ia = i(2+i) = -1+2i = b$

> soit R la rotation de centre 0, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$: son écriture complexe est $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-0) \Leftrightarrow z' = iz$ donc l'égalité précédente traduit le fait que B = R(A). On peut donc en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. De la même manière on a D = R(C) et donc d = ic = -1/2 – i.

3. Soit M le milieu du segment $[BC]$: on a $M\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$ donc $M\left(-1+\dfrac{5}{4}i\right)$.

Par conséquent : $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = -1+\dfrac{5}{4}i$ et $z_{\overrightarrow{DA}} = z_A - z_D = \dfrac{5}{2}+2i$.

On obtient alors $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = ... = \dfrac{1}{2}i$.

4. D'après le cours, on a $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

5. De même, $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \dfrac{1}{2}i$ implique que $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}\right| = \left|\dfrac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow \dfrac{OM}{DA} = \dfrac{1}{2}$ cad $OM = \dfrac{1}{2}DA$.

EXERCICE 6. 5 points.

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie si vous la pensez vraie, un contre-exemple sinon. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz+1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

Vrai

> z' = az + b est bien l'écriture d'une similitude directe

> a = 2i donc elle est d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

> l'équation au point fixe z' = z a bien pour solution $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note S la surface d'équation $z=x^2+2x+y^2+1$.
Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées (−1 ; 0 ; 5) et de rayon 5 ».
Faux

$S\cap P:\begin{cases} z=x^2+2x+y^2+1 \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2=5 \\ z=5 \end{cases}$ **:** le rayon du cercle obtenu est $\sqrt{5}$.

3. Proposition 3 : « $5^{750}-1$ est un multiple de 7 ».
Vrai

On obtient facilement que $5^6\equiv 1\ (7)$ et comme 750 = 6×125, $5^{750}\equiv\left(5^6\right)^{125}\equiv 1\ (7)$.

4. Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de 3n +4 et de 4n +3 est égal à 7 ».
Vrai
> soit d le pgcd cherché : d divise donc la combinaison linéaire 4(3n +4) – 3(4n +3) cad d divise 7. Ainsi d = 1 ou d = 7.

> Mais comme $n\equiv 1\ (7)$ on a $\begin{cases} 3n+4\equiv 0\ (7) \\ 4n+3\equiv 0\ (7) \end{cases}$ donc 7 divise chacun des nombres.

Ainsi d = 7.

5. Soient a et b deux entiers naturels.
Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv$ = 2 alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».
Faux
a = 2, u = -2, b = 3 et v = 2 fournit un contre exemple puisque 2 et 3 sont premiers entre eux.