

Produit scalaire dans l'espace

▪ Définition

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le réel définie par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonale de C sur la droite (AB)

▪ Propriétés

Pour tout vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de W on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
$ \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ $	$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ \leq \ \vec{u}\ + \ \vec{v}\ $	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

□ A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B).

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

▪ Distance d'un point à un plan

Si P : ax + by + cz + d = 0 et un point A(x₀, y₀, z₀), alors $d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Théorème : P et P' sont deux plans de l'espace

1) Soit P : ax + by + cz + d = 0 et $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normale à P

et P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0 et $\vec{N}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ un vecteur normale à P'

$$\square P \perp P' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \quad \square P // P' \Leftrightarrow \vec{N} \text{ et } \vec{N}' \text{ sont colinéaires}$$

2) Soit D une droite de l'espace de vecteur directeur \vec{u}

$$\square P \perp D \Leftrightarrow \vec{N} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \quad \square P // D \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{u} = 0$$

Sphère

Soit I un point de l'espace et R un réel positif. l'ensemble des points M de l'espace tel que IM = R est la sphère de centre I et de rayon R, on note S_(I,R).

Théorème

Soit A et B deux points distincts de l'espace .

l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre [AB]

Théorème : équations cartésiennes d'une sphère

Soit $A(a,b,c)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.

$$M(x,y,z) \in S_{(A,R)} \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Théorème :

Soit $E = \{M(x,y,z) \text{ de l'espace} / x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0\}$.

On pose $h = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\lambda}{4}$ et $A\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$.

$\square E = \emptyset$ si $h < 0$. $\square E = \{A\}$ si $h = 0$. $\square E = S_{(A, \sqrt{h})}$ si $h > 0$

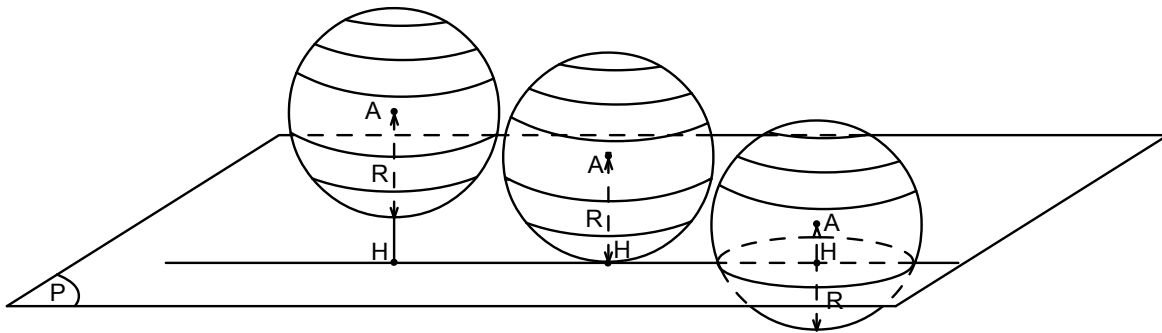
Théorème : Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $S_{(A,R)}$ une sphère de centre A et de rayon R . Soit P un plan de l'espace

et H le projeté orthogonal de A sur P . on a : $\square P \cap S = \emptyset$ si $AH > R$

$\square P \cap S = \{H\}$ si $AH = R$. On dit que P est tangent à S en H .

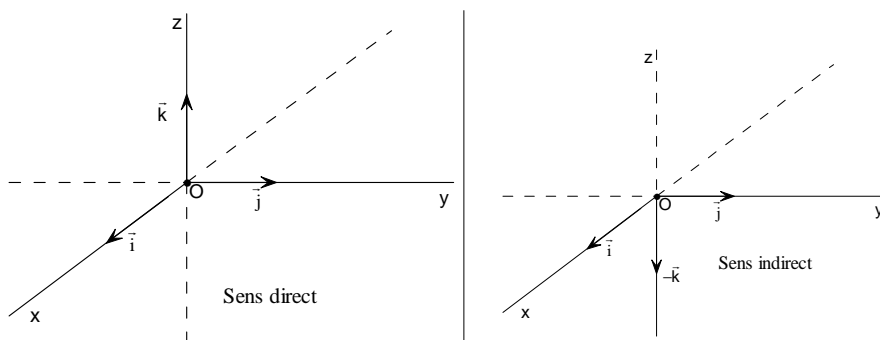
$\square P \cap S = \zeta_{(H,r)}$ si $AH < R$. $\zeta_{(H,r)}$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - AH^2}$



Produit vectoriel

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E . On désigne par

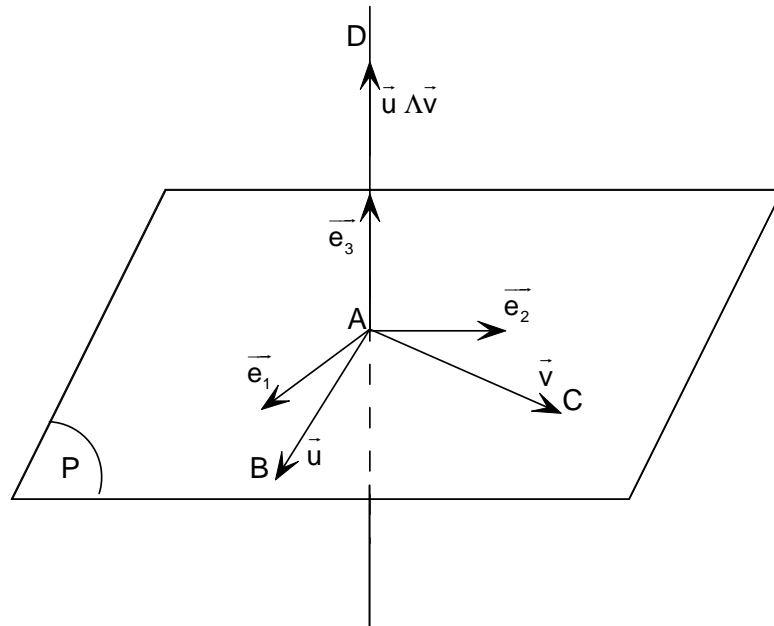
I, J et K les points de E tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Un bonhomme couché sur (OI) . La tête en I , les pieds en O et regardant le point J . Par convention si le point K est à gauche du bonhomme le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct ou de sens positif, si non le repère est indirect ou de sens négatif.



Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de W . On appelle produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par : Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et P le plan (ABC) . D une droite perpendiculaire en A au plan P . Soit $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé de P . \vec{e}_3 l'unique vecteur de W tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée direct de W .



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{e}_3$$

Propriétés

- On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} unitaires et orthogonaux. Pour tout vecteur \vec{w} on a : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de W si et seulement si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in W^2, (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha.(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in W^2, (\alpha \vec{u}) \wedge (\beta \vec{v}) = (\alpha \beta).(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in W^3, (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$
- L'aire d'un triangle ABC est $A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

- Soit $D = (A, \vec{u})$, M un point de l'espace alors la distance du point A à la droite D est :

$$d = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

