

**an 06 p 59.**

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthogonal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ . On considère les points A, B et C de coordonnées respectives  $(1 ; 0 ; 2)$ ,  $(1 ; 1 ; 4)$  et  $(-1 ; 1 ; 1)$ .

► 1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3 ; 4 ; -2)$ . Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

u 2. Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les plans d'équations respectives :  $2x + y + 2z + 1 = 0$  et  $x - 2y + 6z = 0$ .

a. Montrer que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon une droite  $\mathcal{D}$  dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite  $\mathcal{D}$  et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

► 3. Soit  $t$  un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et  $t$ .

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif  $t$ .

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur  $\vec{IG}$  en fonction du vecteur  $\vec{IC}$ .

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque  $t$  décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.

Pour quelle valeur de  $t$ , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthogonal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ . On considère les points A, B et C de coordonnées respectives  $(1 ; 0 ; 2)$ ,  $(1 ; 1 ; 4)$  et  $(-1 ; 1 ; 1)$ .

► 1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\vec{AB}(0;1;2)$  et  $\vec{AC}(-2;1;-1)$  il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\vec{AB} = k \vec{AC}$ , en effet  $0 = k \times -2$  et  $1 = k \times 1$  est impossible donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires et donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3 ; 4 ; -2)$ . Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 3 \times 0 + 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-2) + 4 \times 1 + (-2) \times (-1) = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{AB} \text{ et } \vec{n} \perp \vec{AC}$$

$\vec{n}$  étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC),  $\vec{n}$  est normal à (ABC)

donc (ABC) a une équation de la forme  $3x + 4y - 2z + d = 0$

et puisque  $A(1 ; 0 ; 2) \in (ABC)$ ,  $3 + 0 - 4 + d = 0$  et donc  $d = 1$

(ABC) a donc pour équation :  $3x + 4y - 2z + 1 = 0$

► 2. Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les plans d'équations respectives :  $2x + y + 2z + 1 = 0$  et  $x - 2y + 6z = 0$ .

a. Montrer que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon une droite  $\mathcal{D}$  dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

$$M(x ; y ; z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \text{ en posant } z = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ on obtient } \begin{cases} 2x + y = -2k - 1 \quad (1) \\ x - 2y = -6k \quad (2) \\ z = k \end{cases}$$

$$2 \times (1) + (2) \text{ donne : } 5x = -10k - 2 \text{ d'où } x = -2k - \frac{2}{5} \quad \text{et } (1) - 2 \times (2) \text{ donne : } 5y = 10k - 1 \text{ d'où } y = 2k - \frac{1}{5}$$

$$\text{On en conclue que } \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D} \text{ dont un système d'équations paramétriques est } \begin{cases} x = -2k - \frac{2}{5} \\ y = 2k - \frac{1}{5} \\ z = k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

b. La droite  $\mathcal{D}$  et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

$\vec{d}(-2 ; 2 ; 1)$  est directeur de  $\mathcal{D}$  et  $\vec{n}(3 ; 4 ; -2)$  est normal à  $\mathcal{P}$ , or  $\vec{n} \cdot \vec{d} = 3 \times (-2) + 4 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$   
donc  $\vec{n} \perp \vec{d}$ . On en déduit que  $\mathcal{D}$  est parallèle à (ABC).

► 3. Soit  $t$  un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points (A ; 1), (B ; 2) et (C ; t).

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif  $t$ .

$$1 + 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -3 \text{ or } t \geq 0, \text{ donc G existe.}$$

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

$$\text{I est le barycentre de (A ; 1) (B ; 2) donc } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + 2x_B}{3} = \frac{1 + 2}{3} = 1 \\ y_I = \frac{0 + 2}{3} = \frac{2}{3} \\ z_I = \frac{2 + 8}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Exprimer le vecteur  $\vec{IG}$  en fonction du vecteur  $\vec{IC}$ .

G des points (A ; 1), (B ; 2) et (C ; t) et I est le barycentre de (A ; 1) (B ; 2)

donc d'après la propriété du barycentre partiel, G est le barycentre de (I ; 3) et (C ; t)

on sait alors que  $2\vec{GI} + t\vec{GC} = \vec{0}$  dont on déduit que  $\vec{IG} = \frac{t}{3+t} \vec{IC}$

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.

$\vec{IG} = \frac{t}{3+t} \vec{IC}$  donc  $f(t) = \frac{t}{3+t}$  est l'abscisse de G dans le repère (I,  $\vec{IC}$ ) de la droite (IC)

$f'(t) = \frac{1(3+t) - t}{(3+t)^2} = \frac{3}{(3+t)^2}$  qui est toujours positif donc f ↗ sur  $[0 ; +\infty[$ .

or  $f(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$  donc f(t) prend toutes les valeurs de  $[0 ; 1[$  donc G décrit  $[IC] \setminus \{C\}$ .

Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

G est le milieu de [IC] quand  $\frac{t}{3+t} = \frac{1}{2}$  soit quand  $t = 3$