

Test 01 – TS01-TS02

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{x^2} - 1$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, avec $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{(x-1)^4}$.
Déterminer les asymptotes éventuelles de C_f .
4. Soit f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0; \pi] \\ f(x) = x - \pi & \text{si } x \in]\pi; +\infty[\end{cases}$$
. f est-elle continue en π ?
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$.
6. Montrer que la droite d'équation $D: y = 2x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f , définie par $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$.
Préciser les positions relatives de C et D .
7. Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + 0, \underbrace{0\dots0}_n 1$.

1.

> En l'infini, la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ se comporte comme le quotient de ses monômes de plus haut degré $\frac{x^2}{x^2} = 1$.

> Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = 1$.

2.

> Pour tout x , $-1 \leq \cos(x^3) \leq 1$, donc pour x non nul, $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(x^3)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ d'où on déduit que

$$-\frac{1}{x^2} - 1 \leq \frac{\cos(x^3)}{x^2} - 1 \leq \frac{1}{x^2} - 1.$$

> Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = -1$, le théorème des gendarmes permet de conclure.

3.

> Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} - \{1\}$.

> **En l'infini**, la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^4}$ se comporte comme le quotient de ses monômes de plus haut degré $\frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote à Cf en l'infini.

> **En 1** : le numérateur vaut -1 et $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^4 = 0^+$: ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote à Cf.

4.

> La fonction f est continue en π si $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi)$.

> On a : $f(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$ puisque $\sin(\pi) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \pi - \pi = 0$$

La fonction est donc continue en π .

5.

La fonction $f(x) = \sqrt{2x+1}$ est dérivable en 0 donc on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$.

Comme $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, on obtient $f'(0) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = 1$.

6.

> Pour prouver que la droite d'équation $D : y = 2x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f , on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) = 0$.

On a $\sqrt{4x^2 + 1} - 2x = \frac{(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) \times (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x}$ d'où le résultat cherché.

> Pour étudier les positions relatives de C et D, on étudie le signe de $f(x) - 2x$.

- Pour x positif, on a $4x^2 + 1 \geq 4x^2 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} \geq 2x$ cad $f(x) \geq 2x$: ainsi, Cf est au dessus de D.
- Pour x négatif, on a $\sqrt{4x^2 + 1} \geq 0 \geq 2x$ donc $f(x) \geq 2x$: ainsi, Cf est encore au dessus de D.

7.

Déterminer la limite de la suite u de terme général $u_n = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + 0,\underbrace{0\dots0}_n 1$.

Remarquons que $u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme 1.

Ainsi $u_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)$: comme $-1 < \frac{1}{10} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ et par conséquent u_n

converge vers $\frac{10}{9}$.