Test 01 Octobre 2010

Faites en sorte que vos raisonnements soient clairs et bien rédigés. Rédigez proprement vos réponses.
Durée : 1h – Calculatrice interdite. Traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 – 4 points

On donne $a = 2n^2 + 5n - 3$ et $b = n^2 + 2n - 3$ où n est un entier naturel.
1. Factoriser a et b.
2. En déduire leur pgcd.

Exercice 2 – 2 points

Soit n un entier naturel n, u et v deux suites définies par $u_n = 6n + 1$ et $v_n = 8n + 1$. Déterminer le pgcd des nombres u_n et v_n.

Exercice 3 – 2 points

Sachant que $38367 = 152 \times 251 + 215$, déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de 38367 par 152.

Exercice 4 – 3 points

1. Rappeler la définition de a divise b, où a et b sont deux entiers, a non nul.
2. Prouver que si a|b et c|d alors ac | bd. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 – 5 points

1. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les restes possibles de 5^n dans la division euclidienne par 16.

2. En déduire le reste de 149^{2010} dans la division euclidienne par 16.

Exercice 6 – 4 points

1. Retrouver, à l'aide de la notion de congruence, le critère de divisibilité par 11 d'un entier écrit en base 10.

2. Le nombre 16170 est-il divisible par 11 ? Si non, quel est le plus petit nombre à lui ajouter pour qu'il les soit ?

Corrigé Test 01

Exercice 1

On donne $a = 2n^2 + 5n - 3$ et $b = n^2 + 2n - 3$ où n est un entier naturel.

1. A l'aide des règles classiques sur les trinômes, on obtient $a = (2n-1)(n+3)$ et $b = (n-1)(n+3)$.
2. > On a alors pgcd(a,b) = $p\gcd\left((2n-1)(n+3),(n-1)(n+3)\right) = (n+3)\, p\gcd(2n-1, n-1)$.

   > Reste à déterminer le pgcd de 2n-1 et n-1.
   Soit d ce pgcd : d divise 2n-1 et n-1 donc il divise 2n-1 – 2(n-1) = 1.
   Ainsi d = 1 et on a pgcd(a,b) = n + 3.

Exercice 2

Soit d le pgcd de $u_n = 6n+1$ et $v_n = 8n+1$.
> Alors d divise $u_n = 6n+1$ et $v_n = 8n+1$ donc il divise $8u_n = 48n+8$ et $6v_n = 48n+6$ donc leur différence.
Ainsi, d divise 8 - 6 = 2 donc d =1 ou d = 2.
> Mais comme u (et même v) sont impairs pour tout n, ils ne sont pas divisibles par 2 donc le pgcd ne peut être 2.
> Ainsi, pour tout n, d = 1.

Exercice 3

Ici, il faut tester la condition sur le reste de la division…
On a $38367 = 152 \times 251 + 215$, mais $215 > 152$ donc ce n'est pas une division euclidienne.
Par contre $38367 = 152 \times 251 + 215 \Rightarrow 38367 = 152 \times 252 + 63$ avec $0 \leq 63 < 152$ donc 63 est le reste dans la division euclidienne de 38367 par 152.

Exercice 4

Voir cours

Exercice 5

1. On a $5 \equiv 5\,[16]$, $5^2 \equiv 25\,[16] \equiv 9\,[16]$, $5^3 \equiv 5 \times 9\,[16] \equiv 13\,[16]$ et $5^4 \equiv 5 \times 13\,[16] \equiv 1\,[16]$.
   On sait alors que :
   > si n est de la forme 4k, le reste 5^n par 16 est 1.
   > si n est de la forme 4k+3, le reste 5^n par 16 est 13.
   > si n est de la forme 4k+2, le reste 5^n par 16 est 9.
   > si n est de la forme 4k+1, le reste 5^n par 16 est 5.
   Comme tout entier n est de l'une des formes suivantes, tous les cas ont été traités.

2. > Déjà, $149 \equiv 5\,[16]$ donc pour tout entier naturel n on a, $149^n \equiv 5^n\,[16]$.
   > Par ailleurs, $2010 = 2008 + 2 = 4 \times 502 + 2$ donc d'après la partie 1, le reste de 146^{2010} dans la division euclidienne par 16 est 9.

Exercice 6

1. Soit $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ l'écriture de x en base décimale. Comme $10 \equiv -1\,(11)$, on en déduit que :

<u>si k pair</u> : $10^k \equiv 1\,(11)$ <u>si k impair</u> : $10^k \equiv -1\,(11)$

Par conséquent, $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum a_{2k} - \sum a_{2k+1}\ (11)$ et on en déduit que 11 divise x ssi x est congru à 0 modulo 11, ce qui donne ssi $\sum a_{2k} \equiv \sum a_{2k+1}\ (11)$.

2. Pour 16170 : on a 6+7 = 13 et 1+1+0 = 2. Comme $13 \equiv 2\,(11)$, on peut affirmer que 11 divise 16170.