Mathématiques. TS1 et TS 2.	**05/11/2009**
CALCULATRICE INTERDITE.	*Durée : 1h*

Exercice I : QCM (10 points)

Cocher la case correspondant à la réponse exacte. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise en enlève 0.5.

1. f est la fonction définie sur]0 ;+∞[par f(x) = $\frac{e^x}{x}$. Sa limite en +∞ est …

0 | +∞ | 1

2. L'approximation affine de e^{2x} pour x proche de 1 est…

$e^2(2x+1)$ | $e^2(x-1)$ | $e^2(2x-1)$

3. La fonction f définie par $\frac{1}{e^x}$ est dérivable sur IR et sa dérivée est …

0 | $-e^{-x}$ | $\frac{1}{e^x}$

4. La limite, quand x tend vers 0 de $\frac{e^{2x}-1}{x}$ est …

0 | +∞ | 2

5. L'équation $e^{2x} - e^x + 1 = 0$ a :

0 solution | 1 solution | 2 solutions

Désormais, f représente la fonction définie par $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$.

6. La fonction f est définie sur

$\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}$ | $]0;+\infty[$

7. Pour tout x, on a $\frac{e^x}{e^x+1}$:

$\frac{1}{e^{-x}+1}$ | 1/2 | $1 + e^x$

8. La droite Δ d'équation y = x + 1 est asymptote à Cf en

+∞ | -∞ | en +∞ et en -∞

9. Cf intercepte son asymptote Δ

jamais | une seule fois | plus d'une fois

10. Sur son domaine, la fonction f est :

sans parité | impaire | paire

Exercice II : (7 points)

f est la fonction définie sur IR^* par f(x) = $\frac{e^x}{x}$

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine.
2. Calculer la fonction dérivée de f.
3. Etudier les variations de f.
4. Combien de solutions admet l'équation f(x) = 2 ?

Exercice III : (3 points)

<u>Prérequis</u> : exp(0) = 1
Pour tout réels x et y, on a exp(x+y) = exp(x).exp(y)

1. Montrer que pour tout réel x on a exp(-x) = $\frac{1}{\exp(x)}$.
2. Montrer que pour tout réel x on a exp(2x) = (exp(x))².
3. En déduire que la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice I : QCM (10 points)

1. f est la fonction définie sur]0 ;+∞[par f(x) = $\frac{e^x}{x}$. Sa limite en +∞ est …

0 | +∞ (résultat de cours à savoir) | 1

2. L'approximation affine de e^{2x} pour x proche de 1 est…

$e^2(2x+1)$ | $e^2(x-1)$ | $e^2(2x-1)$

Soit f(x) = e^{2x}.
Pour x proche de 1, f(x) ≈ f'(1)(x – 1) + f(1) (« on remplace la courbe par sa tangente »)
f'(x) = $2e^{2x}$ donc f'(1) = 2e². On a alors f(x) ≈ 2e²(x – 1) + e² c'est à dire f(x) ≈ e²(2x – 1)

3. La fonction f définie par $\frac{1}{e^x}$ est dérivable sur IR et sa dérivée est …

0 | $-e^{-x}$ | $\frac{1}{e^x}$

Comme f(x) = e^{-x} et $(e^u)' = u'e^u$, on a f'(x) = $(-x)'e^{-x}$ = – e^x

4. La limite, quand x tend vers 0 de $\frac{e^{2x}-1}{x}$ est …

0 | +∞ | 2

$\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times \frac{e^X - 1}{X}$ et on sait que $\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ donc …

5. L'équation $e^{2x} - e^x + 1 = 0$ a :

0 solution | 1 solution | 2 solutions

$e^{2x} - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X + 1 = 0$ avec $X = e^x$
X² – X + 1 a pour discriminant Δ = –3 et n'a donc pas de racine.

Désormais, f représente la fonction définie par $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

6. La fonction f est définie sur

IR+ | IR |]0 ; +∞[

∀ x ∈ IR, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 \neq 0$

7. Pour tout x, on a $\frac{e^x}{e^x+1}$:

$\frac{1}{e^{-x}+1}$ | 1/2 | 1 + e^x

$\frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{1/e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x}$

8. La droite Δ d'équation y = x + 1 est asymptote à Cf en

+∞ | -∞ | en +∞ et en -∞

$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + 1 + r(x)$ avec $r(x) = -\frac{2e^x}{e^x + 1}$. Quand x → –∞, e^x → 0 donc r(x) → 0

9. Cf intercepte son asymptote Δ

jamais | une seule fois | plus d'une fois

Cf intercepte son asymptote Δ quand f(x) = x + 1.

Or $f(x) = x + 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ce qui est impossible.

10. Sur son domaine, la fonction f est :

sans parité impaire paire

On a $f(-x) = -x + 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1} = -x + 1 - \frac{2/e^x}{1/e^x + 1}$

$= -x + 1 - \frac{2}{1+e^x} = -x+1-\frac{(2+2e^x)-2e^x}{1+e^x} = -x+1-2+\frac{2e^x}{1+e^x} = -x-1+\frac{2e^x}{1+e^x}$

Ainsi, f est impaire.

Exercice II : (7 points)

f est la fonction définie sur IR* par f(x) = $\frac{e^x}{x}$

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine.

> on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (résultat de croissance comparée en l'infini)

> quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

> quand $x \to 0^-$, $e^x \to 1$ donc $\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$

> quand $x \to 0^+$, $e^x \to 1$ donc $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$

2. Calculer la fonction dérivée de f.

$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$

3. Etudier les variations de f.

dans $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$

on en déduit que : pour $x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) < 0$ donc f est ↘ de 0 à $-\infty$

pour $x \in]0 ; 1[$, $f'(x) < 0$ donc f est ↘ de $+\infty$ à e

pour $x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est ↗ de e à $+\infty$

4. Combien de solutions admet l'équation f(x) = 2 ?

pour $x \in]-\infty ; 0[$, f est majorée par 0 donc $f(x) \neq 2$

pour $x \in]0 ; +\infty [$, f(x) est minorée par e>2 donc $f(x) \neq 2$

-> L'équation f(x) = 2 n'a donc pas de solution.

Exercice III : (3 points)

Prérequis : (1) exp(0) = 1

(2) Pour tous réels x et y, on a exp(x+y) = exp(x) × exp(y)

1.Montrer que pour tout réel x on a exp(-x) = $\frac{1}{\exp(x)}$**.**

Appliquons (2) pour y = -x :

exp(x) × exp(−x) = exp (x + (−x)) d'après (2)

= exp(0) = 1 d'après (1)

donc exp(−x) = 1/exp(x)

2.Montrer que pour tout réel x on a exp(2x) = (exp(x))².

Appliquons (2) pour y = x :

(exp(x))² = exp(x) × exp(x) = exp(x + x) d'après (2)

= exp(2x)

3.En déduire que la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

> $\forall x \in \mathbb{R}$, exp(x) = exp(2(x/2)) = (exp(x/2))² donc exp(x) ≥ 0

> Supposons qu'il existe un réel x tel que exp(x) = 0. On aurait : exp(x) × exp(−x) = 1 d'après 1.
Mais exp(x) × exp(−x) = 0 × exp(−x) = 0 et comme 1 ≠ 0 ! donc exp(x) n'est jamais nulle