Chapitre 03
Continuité et dérivabilité des fonctions.

Objectifs

Depuis tout petit déjà, le mathématicien essaye de résoudre des équations.
Il a commencé par l'équation ax + b = 0, il s'est ensuite attaqué aux racines du trinôme et finalement il se demande naturellement quand l'équation f(x) = 0 possède des solutions, pour une fonction f « quelconque ». Le théorème des valeurs intermédiaires, vu en $1^{\text{ère}}$ S, permet de donner des hypothèses sur la fonction f pour assurer l'existence de telles solutions.

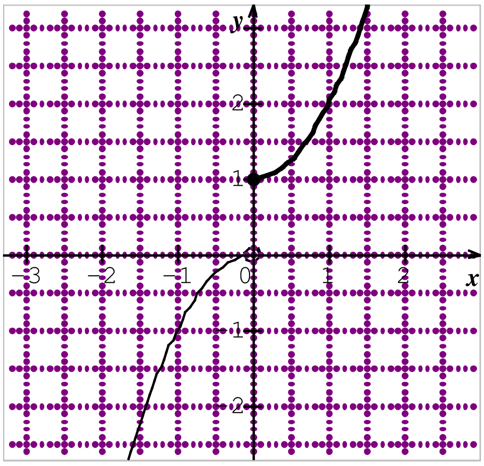
Le premier objectif de ce chapitre sera de trouver des hypothèses plus faibles que celles vues en première.
Nous aborderons ainsi la notion de continuité, sous un aspect à la fois graphique et algébrique, et nous verrons qu'en fait, cet notion s'avèrera aussi capitale dans d'autres théorèmes.

Le second objectif du chapitre est de préciser la notion de dérivabilité.
Comme les asymptotes nous ont précédemment permis d'approximer une fonction en l'infini, la notion de nombre dérivé, conjuguée à celle de tangente, nous donnera un comportement local des fonctions. Premier pas vers ce qu'on appelle les développements limités, la notion d'approximation affine sera le point central de la construction d'une nouvelle fonction : la fonction exponentielle…

Support de travail pour le chapitre :
→ les animations sur la limite - la continuité – le théorème des valeurs intermédiaires
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/limites/index.php

→ les animations sur le nombre dérivée – les tangentes
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/derive/index.php
ou
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/tangente/index.php

Introduction.
Visualisation des notions de limites et de continuité.



Exercice 0-1.

Soit f la fonction définie la courbe représentative ci-contre.
Soit a un nombre réel.

1. On pose ici a = 1.
a. f est elle définie en a ?
Si oui, donner la valeur de f(a).
b. Peut-on tracer cette courbe sans lever le crayon au voisinage de a.
c. Déterminer la limite de f à gauche de a, à droite de a puis en a.

2. Mêmes questions avec a = 0.

Solution.
1. a. f est bien définie en 1 par f(1) = 2.
b. oui, la courbe « ne saute pas ».
c. On a par lecture graphique : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Autrement dit $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.
2. a. Avec les conventions usuelles, f est bien définie en 0 par f(0) = 1.
b. Non, au voisinage de 0 la courbe « fait un saut » : on parle de discontinuité en 0.
c. Graphiquement, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$: les limites à gauche et à droite étant différentes, on dira que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 0-2.
On admet que pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$.
On notera n = E(x), appelé partie entière de x.

1. Déterminer $E(0)$, $E(5.7)$, $E(\pi)$, $E\left(\frac{5}{3}\right)$.
2. Représenter cette fonction sur [0 ;4].
3. Déterminer les points au voisinage desquels on ne peut représenter E sans lever le crayon.

Solution.
Voir la fiche de cours sur la partie entière pour l'étude de cette fonction.

Bilan : si une fonction f est définie en a mais n'admet pas de limite en a (par exemple lorsque la limite à gauche diffère de la limite à droite), alors il est impossible de représenter sa courbe au voisinage de a sans lever le crayon.
On dira que ce type de fonction n'est pas continue en a.

PARTIE I.
Fonctions continues et théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

A. Fonctions continues.

Définition (Méthode).
1. Soit f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a. On dit que f est continue en a si :
- f est définie en a .
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (éventuellement à gauche et à droite de a).

2. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque : une fonction non définie en a ne sera donc pas continue en a.

Précisions :

→ Graphiquement : f est continue en a « si on peut tracer C_f sans lever le crayon », sans « sauts » au voisinage de a.

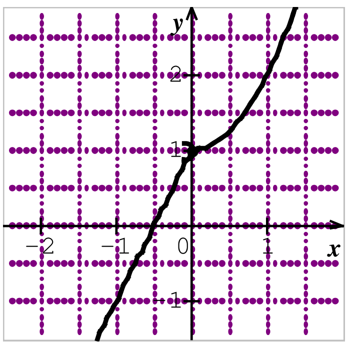
Cette interprétation est à manier avec précautions ($f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *en 0).*

→ **En terme de limites,**
Si f est définie en a, f sera continue en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ **.**

Remarque : A priori, il faut donc se souvenir de la définition de limite d'une fonction...
Heureusement, il y a l'interprétation graphique et plusieurs théorèmes pratiques à venir pour nous éviter la lourdeur de tels calculs…

Propriété (ADMISE).
Les fonctions polynôme, racine carrée, valeur absolue, inverse, cos, sin sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs **ensembles de définitions**.
La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues sur tout intervalle **où elles sont définies**.

Exercice I-1. Tracer la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x+1 & pour \quad x \leq 0 \\ f(x) = x^2+1 & pour \quad x > 0 \end{cases}$. Est-elle continue en 0 ?



Solution.
Etudions la continuité en 0 :
- f est bien définie en 0 : on a f(0) = 2.0 +1 = 1 car pour $x \leq 0$ on a $f(x) = 2x+1$.
- A gauche de 0 : f est définie par $f(x) = 2x+1$ donc d'après le résultat ci-dessus, f est continue et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2\times 0+1 = 1$.
- A droite de 0 : f est définie par $f(x) = x^2+1$ donc d'après le résultat ci-dessus, f est continue et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^2+1 = 1$.

Ainsi, on a $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Vocabulaire.
Une fonction non continue en a est dite discontinue en a.

Exemple.
Je vous renvoie à nouveau à la fiche sur la fonction partie entière, au programme de Ts…
Le premier exemple de ce chapitre fournit lui aussi un exemple de fonction non continue en a.

Nous allons distinguer deux types de discontinuité :

- la discontinuité critique : fonction inverse, partie entière…
- la « fausse discontinuité » : x -> $\frac{x}{x}$, x -> $\frac{\sin x}{x}$, x -> $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$…

Prolongement par continuité

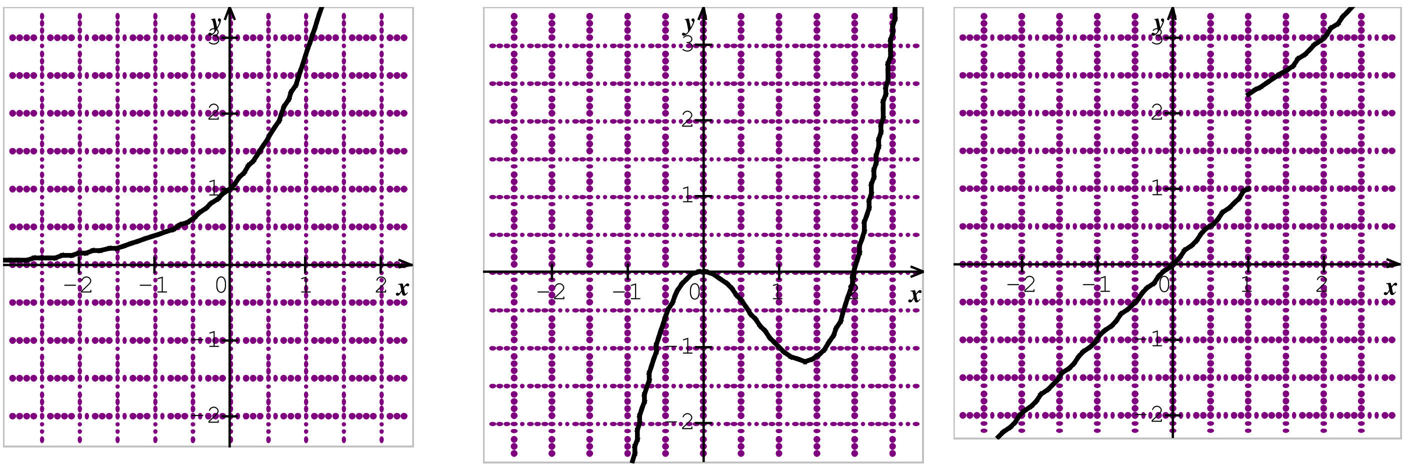
Exercice I-2. Soit f définie pour x non nul par f : x $\rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$.

1. Justifier que f est continue sur]–∞ ;0[et sur]0 ;+∞[.
2. Déterminer la limite de f quand x tend vers 0.
3. Etudier la continuité de la fonction : $\tilde{f} : \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x),\ x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 1 \end{cases}$.

Solution.
1. On utilise le théorème sur les opérations et les fonctions de référence.
Pour x non nul, il n'ay aucun problème : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre précédent, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ (à savoir redémontrer).
3. La fonction $\tilde{f}$ est définie sur IR et continue sur $\mathbb{R}^*$ puisque f l'est.
En 0 : à gauche de 0, $\lim_{x\to 0^-}\tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ et à droite de 0, $\lim_{x\to 0^+}\tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.
Ainsi, $\lim_{x\to 0}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$ donc $\tilde{f}$ est continue en 0.
Finalement, $\tilde{f}$ est continue sur IR.
$\rightarrow$ On dit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

B. Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice I-3. dans les trois cas suivants, donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = k suivant les valeurs de k.



Solution.

Méthode : pour déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = k, on trace la droite horizontale d'équation y = k, puis on compte le nombre de points d'intersections de D et Cf.

1. Pour tout $k \leq 0$, f(x) = k n'a aucune solutions.
Pour tout k > 0, k a un unique antécédent par f.

2. Pour tout $k \in]-1.2;0[$, f(x) = k a trois solutions.
Pour k = -1.2 ou k = 0, k a deux antécédents.
Sinon, f(x) = k a une unique solution pour tous les autres k.

3. Pour tout $k \in]1;2.4[$, f(x) = k n'a aucune solutions.
Sinon, f(x) = k a une unique solution pour tous les autres k.

Théorème 1 des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie que I = [a ;b].

- si f est continue sur I,
- strictement monotone sur I
- si le réel k est compris entre f(a) et f(b)

ou encore si f passe d'une valeur < k à une valeur > k.

alors il existe un unique réel c dans [a ;b] tel que f(c) = k.

Précisions : On dit aussi que k a un unique antécédent par f.
Cela signifie que la droite d'équation y = k coupe C_f une seule fois sur [a ;b]

Démonstration.

Existence de c :voir les ROC d'analyse du site pour une démonstration complète.

Unicité : supposons qu'il existe deux réels distincts c_1 et c_2 tels que f(c_1)= k et f(c_2) = k. Supposons par exemple que $c_1 < c_2$.

Comme f est strictement monotone, on a f(c_1) < f(c_2) ou f(c_1) > f(c_2).

Mais ceci est impossible puisque f(c_1)= f(c_2)= k.

Il ne peut donc exister deux antécédents distincts de k, donc il en existe un seul.

Exercice I-4.

a. Montrer que si f est continue sur [a ;b], strictement monotone sur [a ;b] alors un réel k n'admet pas forcément d'antécédent.

b. Montrer que si f strictement monotone sur [a ;b] et que k est compris entre f(a) et f(b) alors k n'admet pas forcément d'antécédent.

Solution.

a. Reprendre l'exemple 1 de l'exercice I-3 avec k ≤ 0.

b. Reprendre l'exemple 3 de l'exercice I-3 avec k compris entre 1 et 2.4.

Théorème 2 des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie que I = [a ;b].

- Si f est continue sur I,
- si k est compris entre f(a) et f(b)

alors, il existe au moins un réel c dans [a ;b] tel que f(c) = k.

Remarque : Ces deux théorèmes sont des théorèmes d'existence : ils sont non constructifs, on ne connaît pas les éventuelles solutions de l'équation à l'issu des théorèmes.
Pour les construire, on utilisera la calculatrice ou la méthode de dichotomie…

Extension à des intervalles ouverts :

Les théorèmes précédents sont aussi valables si, à la place de [a ;b], on a]a ;b[, [a ;b[, [a ;+∞[, etc …
On peut aussi remplacer f(a) par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, f(b) par $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, etc …

Exercice I-5.
Etudier l'existence de solutions à l'équation $x^3 - 3x = 3$ sur [-2 ;3].

> **Solution.**
> Posons $f(x) = x^3 - 3x - 3$: f est dérivable sur IR et on a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
> Comme un trinôme est du signe de –a entre ses racines, on a :
>
> | x | -2 | | -1 | | 1 | | 3 |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | f '(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
> | f (x) | -5 | ↗ | -1 | ↘ | -5 | ↗ | 15 |
>
> Sur [-2 ;1], f est majorée par –1 donc f(x) = 0 n'a pas de solutions sur cet intervalle.
>
> Sur [1 ;3], (1) f est continue car c'est un polynôme
> (2) f est strictement croissante
> (3) f passe d'une valeur négative (-5) à une valeur positive (15)
> d'après le TVI, f(x) = 0 admet une unique solution sur [1 ;3].
>
> En regroupant les deux études, f admet une unique solution sur [-2 ;3].

Exercice I-6.
Montrer que tout polynôme P de degré impair admet une racine sur IR.

> **Solution.**
> (1) P est continue car c'est un polynôme
> (2) En l'infini, un polynôme se comporte comme son monôme de plus degré.
> Supposons sans perdre en généralités que le coefficient de ce monôme soit positif.
> Comme celui-ci est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.
> Ainsi P est continue, passe d'une valeur négative à une valeur positive, donc il s'annule.

<u>Remarques</u> : Méthodes de recherche de solutions de l'équation f(x) = k (une fois que l'on a prouvé l'existence…)

→ **par balayage :** tableau de valeurs de la calculatrice avec un pas fixé en fonction de la précision souhaitée.

→ **par dichotomie :** dans [–1 ;1] par exemple, on prend le milieu 0
on teste f(0) = 1 et 1 > 0 donc b ∈ [0 ;1]
on prend le milieu 0,5, *et on recommence…*

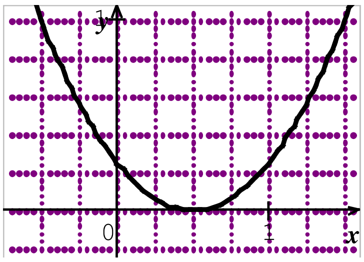
PARTIE II.
Dérivation

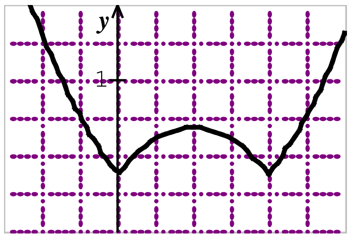
Support de travail pour la partie:
→ les animations sur le nombre dérivée – les tangentes
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/derive/index.php
ou
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/tangente/index.php

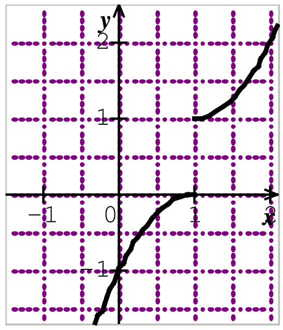
A. Nombre dérivé.

Introduction.

Parmi les fonctions représentées ci-dessous, lesquelles sont dérivables en 0 ou en 1 ?







Solution.
(1) f est dérivable en 0 car Cf admet une tangente non verticale en (0 ;f(0)).
(2) f n'est ni dérivable en 0, ni en 1 : en effet, en chaque point correspondant, Cf admet une demi-tangente différente à gauche et à droite.
(3) f est dérivable en 0 mais pas en 1 (même raison).

Définition (et Méthode) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a ∈ I.

- Si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, on dit que f est dérivable en a.
- On notera alors f '(a) la limite ci-dessus.

Remarque.

quitte à faire le changement de variable x = a + h, cette limite s'écrit parfois $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$:

la quantité $m = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le taux de variation de f entre a et x.
Graphiquement, cela correspond au coefficient directeur de la droite qui passe par A(a ;f(a)) et M(x ;f(x)).

Interprétation graphique (et Méthode) :
- Une fonction est dérivable en a si Cf admet une tangente non verticale en A(a ;f(a)).
- Une fonction n'est pas dérivable en a si
  > elle admet une tangente verticale en A(a ;f(a)).
  > elle admet deux demi-tangentes différentes en $A^-(a^- ;f(a^-))$ et en $A^+(a^+ ;f(a^+))$.

1. Le taux de variation a une limite infinie :

Exercice 2-1.
Etudier la dérivabilité de f(x) = $\sqrt{x}$ définie sur [0 ;+∞[en 0.

Solution.
f est définie en 0 et f(0) = 0.
On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement, C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
On dira plutôt une demi–tangente puisque x → 0+ (on n'a rien pour x → 0–)

2. Le taux de variation a une Limite à gauche différente de sa limite à droite :

Exercice 2-2 :
Soit f(x) = |x²–x| définie sur IR. Etudier la dérivabilité en 0 et 1.

Solution.
→ f est définie en 0 et f(0) = 0.
On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x||x-1|}{x}$: **mais à gauche de 0, |x| = -x ; mais à droite de 0, |x| = x.**
Donc $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{|x||x-1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{-x(1-x)}{x}=-1$ **et** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|x||x-1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x(1-x)}{x}=1$.
f n'est donc pas dérivable en 0 puisque le nombre dérivé à gauche est différent de celui de droite.

→ l'étude est la même en 1.

Graphiquement, au point d'abscisse 0, C_f admet 2 demi–tangentes ; le point d'abscisse 0 est un point anguleux
idem en 1 …

3. Autre cas :

nous allons voir dans la partie B que si f n'est pas continue en a alors elle n'est pas dérivable en a.

Rappel/Bilan :
Graphiquement, une fonction est dérivable en a ssi Cf admet une tangente non verticale au point d'abscisse a.
Son coefficient directeur est alors f'(a), son équation est **T : y = f '(a)(x-a) + f(a)**.

Nous cherchons à donner une valeur approcher au nombre f(x) quand x est près de a.

Première approximation.
Evidemment, si x est près de a, f(x) est près de f(a).
Mais allons un peu plus loin.

Deuxième approximation.
Soit f une fonction dérivable en a, représentée par Cf et de tangente T : y = f '(a)(x-a) + f(a) au point d'abscisse a.

Par définition $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ donc on peut écrire que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Par conséquent, en multipliant par *x-a*, $f(x)=f(a)+\underbrace{f'(a)(x-a)}_{\text{on améliore l'approximation précédente}}+\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Théorème. Approximation affine.
Soit f une fonction dérivable en a.
P**<u>our x très proche de a</u>**, le nombre $\varepsilon(x)$ est très proche de 0 et on a $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$.
<u>Graphiquement</u>, cela signifie que pour x voisin de a, la courbe et la tangente (qui est une droite) sont très proches : on parle d'<u>approximation affine</u> d'une fonction.

Remarque : c'est à rapprocher de la notion d'asymptote.
Lorsque D est asymptote à Cf en l'infini, on en conclu que Cf et D sont très proches pour x très grand, donc on peut approcher le nombre f(x) par le nombre ax + b.

Exercice 2.3.
Sans calculette, donner une valeur approchée de 1.01^{21}. Quelle est l'erreur commise (avec calculette) ? et pour 1.1^{21} ?

Solution.
$\rightarrow$ On a $(1.01)^{21}=(1+0.01)^{21}$: posons donc $f(x)=(1+x)^{21}$.
f est dérivable et on a $f'(x)=21(1+x)^{20}$: comme f est dérivable en 0, on a **pour x près de 0**, $f(x)\approx f(0)+f'(0)(x-0)$ cad $f(x)\approx 1+21x$.
Mais 0.01 est proche de 0 donc $1.01^{21}=f(0.01)\approx 1+21\times 0.01$ cad $1.01^{21}\approx 1.21$.
A la calculatrice, on trouve $1.01^{21}\approx 1.23239$ soit une erreur commise de l'ordre du dixième.

$\rightarrow$ De même, $1.1^{21}=f(0.1)\approx 3.1$. La calculatrice donne 7.4 environ donc l'erreur est énorme !!
En effet, la notion de proche de 0 est relative…

Exercice 2.4.
Sans calculette, donner une valeur approchée de $f\left(10^6\right)$ où $f(x)=x+1+\frac{2x^3+1}{(x+6)^4}$.

Solution.
$\rightarrow$ On a, avec les théorèmes habituels, $\lim_{x\to\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{(x+6)^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{(x)^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$.
La droite D d'équation y = x +1 est donc asymptote à Cf en l'infini.

$\rightarrow$ *Comme* 10^6 *est très grand, on a* $f\left(10^6\right)\approx 10^6+1\approx 10^6$.

Lien avec la physique

En physique on exprime une différence par le symbole Δ.

Avec $\Delta x = x - a$ (variation de x) et $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(a)$ (variation de f(x)) on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - a} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o}$.

En physique, lorsque $x \to a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se note $\frac{dy}{dx}$.

Autrement dit, vous aurez les liens suivants : $f' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $i'(t) = \frac{di}{dt}$, $v'(t) = \frac{dv}{dt}$...

B. Fonction dérivée.

Définition :

- Quand f est dérivable pour tout a d'un intervalle I (« en tout point de I ») on dit que f est dérivable sur I.
- La fonction qui à tout a de I associe le nombre dérivé f'(a) est appelée fonction dérivée de f.

Lien entre dérivabilité et continuité.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Propriété.
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration. Soit f dérivable en a. Par définition $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ donc on peut écrire que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
En passant cette égalité à la limite, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a.

Remarque
La réciproque est fausse : f peut être continue en a sans être dérivable
(par exemple, $f(x) = |x|$ en 0).

Propriété.
Si f n'est pas continue alors f n'est pas dérivable en a.

Démonstration.
Remarquons simplement que les propositions « $P \Rightarrow Q$ » et « non $Q \Rightarrow$ non P » sont équivalentes. On parle de **propositions contraposées**.
Justement, cette propriété est la contraposée de la précédente, donc inutile de la (re)démontrer.

C. Dérivées usuelles et opérations.

$(u + v)' = u' + v'$

$k \in \mathbb{R}$, $(ku)' = ku'$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(1/u)' = -u'/u^2$

$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$

$(\tan x)' = (\sin x/\cos x)' = \ldots = 1/\cos^2 x$

f(x) =	définie sur	dérivable sur	f′(x) =
a	IR	IR	0
x	IR	IR	1
ax	IR	IR	a
x^2	IR	IR	2x
x^n, n ∈ IN	IR	IR	nx^{n-1}
1/x	IR*	IR*	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	[0 ;+∞[	]0 ;+∞[	$1/2\sqrt{x}$
Sin x	IR	IR	cosx
Cos x	IR	IR	–sinx
Tan x	IR\{π/2+kπ }	IR\{π/2+kπ }	$1/\cos^2 x$

Extension de $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$:

On admet (temporairement) que
la formule utilisée pour $n \in \mathbb{N}$ est encore valable pour $n \in \mathbb{Q}$.

Remarquons que cette formule est capitale !! Elle permet d'en retrouver plein d'autres, donc plus besoin de les apprendre…

Exemple. Déterminons $\left(\frac{1}{u}\right)'$ puis $\left(\sqrt{u}\right)'$.

(1) On a $\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -1u'u^{-2} = -\frac{u'}{u^2}$ en appliquant la formule à n = -1.

(2) On a $\left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u'u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{u'}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ en appliquant la formule à n = $\frac{1}{2}$.

Dérivée d'une fonction composée

Cadre : Soit $u = f \circ g$ cad u : I $\xrightarrow{u}$ J inclus dans g(I) $\xrightarrow{g}$ IR
a $\xrightarrow{u}$ g(a) $\xrightarrow{g}$ f(g(a))

on suppose g dérivable en a et f dérivable en g(a).

Propriété.
Soit g définie et dérivable sur I et f définie et dérivable sur J (J étant inclus dans l'image de I par g).
Alors $f \circ g$ est dérivable sur I et $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ c'est à dire $(f \circ g)' = g' \times f'(g)$.

Démonstration (à savoir) non rédigé.

Reprenons la définition : $\frac{f \circ g(x) - f \circ g(a)}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)}}_{(1)} \times \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{(2)}$.

Pour (1) : posons X = g(x) et A = g(a). (1) s'écrit $\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} = \frac{f(X)-f(A)}{X-A}$.

Comme x tend vers a, X tend vers A (en effet g est dérivable en a donc continue en a).

Par conséquent $\lim_{X \to A} \frac{f(X)-f(A)}{X-A} = f'(A) = f(g(a))$ puisque f est dérivable.

Pour (2) : toujours par dérivabilité de g, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.

En regroupant les deux calculs, on obtient le résultat voulu.

Applications de la formule.

$(\sin u)' = u'\cos u$ $(\cos u)' = -u'\sin u$ $(\sqrt{u})' = u'/2\sqrt{u}$

$(u^n)' = nu'\,u^{n-1}$ $(1/u)' = -u'/u^2$

C. Applications de la dérivation : A Venir ou Déjà Vues.

1. **Calculs de limites (forme indéterminée)**

2. **Etablir des inégalités (usage fréquent)**

Par exemple montrer que $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $\sin(x) \leq x$.

3. **Méthode d'Euler**

Voir avec la fonction exponentielle