Annales 2009. p80. Amérique du sud. Novembre 2007.

1. *dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \to e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k(\pi/2) = 0$.

1. *dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \to e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

f est solution de $y' = ay \Leftrightarrow f' = af \Leftrightarrow (e^{ax})' = a\,e^{ax} \Leftrightarrow (ax)'e^{ax} = a\,e^{ax} \Leftrightarrow a\,e^{ax} = a\,e^{ax}$ ce qui est vrai.

donc $f(x) = e^{ax}$ est solution de $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

g est une solution de $y' = ay$ donc $g' = ag$.

$h(x) = g(x)e^{-ax}$. *Pour montrer que h est une fonction constante on va calculer sa dérivée, on devrait trouver 0.*

$h'(x) = (g(x))'e^{-ax} + g(x)\,(e^{-ax})'$

$= g'(x)e^{-ax} + g(x)\,(-ax)'e^{-ax}$

$= g'(x)\,e^{-ax} - ag(x)\,e^{-ax}$

$= 0$ car $g'(x) = ag(x)$ donc h est une fonction constante c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

$h(x) = g(x)\,e^{-ax}$ et $h(x) = C$ donc $g(x) = C\,e^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

toutes les fonctions g obtenues sont les solutions de $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

f_0 est une solution de (E) $\Leftrightarrow f_0' = 2f_0 + \cos x \Leftrightarrow -a\sin x + b\cos x = 2a\cos x + 2b\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow -a\sin x + b\cos x = 2b\sin x + (2a + 1)\cos x$

cette dernière égalité est vraie si $\begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -2/5 \\ b = 1/5 \end{cases}$ donc $f_0(x) = (-2/5)\cos x + (1/5)\sin x$

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) $y' = 2y$.

$y' = 2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

c. Démontrer que f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0).

Montrons que : f est une solution de (E) $\Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (E_0).

$f - f_0$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow (f - f_0)' = 2(f - f_0)$

$\Leftrightarrow f' - f_0' = 2f - 2f_0$

$\Leftrightarrow f' - (2f_0 + \cos x) = 2f - 2f_0$ (car f_0 est solution de (E))

$\Leftrightarrow f' = 2f + \cos x \Leftrightarrow$ f est une solution de (E).

donc l'équivalence est démontrée.

d. En déduire les solutions de (E).

On vient de voir (c) que : f est une solution de (E) $\Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (E_0).

et (d) : $f - f_0$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow (f - f_0)(x) = C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow f(x) = f_0(x) + C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2/5)\cos x + (1/5)\sin x + C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k(\pi/2) = 0$.

$k(x) = (-2/5)\cos x + (1/5)\sin x + C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$,

la condition $k(\pi/2) = 0$ va permettre de trouver C.

$k(\pi/2) = 0 \Leftrightarrow (-2/5)\cos(\pi/2) + (1/5)\sin(\pi/2) + C\,e^{\pi} = 0$

$\Leftrightarrow 1/5 + C\,e^{\pi} = 0$

$\Leftrightarrow C = -(1/5)e^{-\pi}$ donc $k(x) = (-2/5)\cos x + (1/5)\sin x - (1/5)\,e^{2x-\pi} = (1/5)(-2\cos x + \sin x - e^{2x-\pi})$