

Nous allons considérer des **suites de nombres réels**.

Exemple 1.

La suite des nombres 1, 3, 5, 7, 11, 13... **ou** la suite des nombres 100, 110, 121, 133.1, 146.41 ...

Définition/Notation : La suite est en général **noté** (u_n) (ou (v_n) ou (C_n) pour les capitaux), **son premier terme est noté** u_0 , le suivant u_1 , le suivant u_2 ... et ainsi de suite.

Remarque : parfois, on ne commence pas la suite à u_0 mais à u_1 .

→ Cela modifiera un peu les formules.

Exemple 2. : Dans l'exemple 1, pour la première suite donnée, on pose $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$...

Remarque : le **terme général** de la suite est noté u_n : le **terme suivant** est alors u_{n+1} .

Exemple 3.

Dans l'exemple 1, la deuxième suite peut être représentée à l'aide de ce tableau.

u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...
100	110	121	133.1

Certaines suites sont particulières et apparaissent dans les calculs d'intérêts bancaires, de capital, d'effectif d'une population... Ce sont les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Définition.

On dit que la suite (u_n) est **croissante** si quand n augmente, le nombre u_n augmente.

On dit que la suite (u_n) est **décroissante** si quand n augmente, le nombre u_n diminue.

Exemple 4.

La suite définie par $u_1=1$, $u_2=3$, $u_3=5$,... est croissante.

La suite définie par $u_1=100$, $u_2=50$, $u_3=25$,... est décroissante.

La suite définie par $u_1=50$, $u_2=60$, $u_3=40$, $u_4=70$... n'est ni croissante, ni décroissante.

Définition. Soit a un nombre réel.

→ On dit que la suite (u_n) **tend vers a (ou converge vers a)**, si quand n devient très grand le nombre u_n se rapproche de a : on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

→ On dit que la suite (u_n) **tend vers $+\infty$** , si quand n devient très grand le nombre u_n devient infiniment grand : on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 5.

→ Pour la suite définie par $u_n = n^2$: on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

En effet lorsque n devient infiniment grand, le nombre n^2 devient infini.

→ Pour la suite définie par $u_n = 0.9^n$: on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

En effet lorsque n devient très grand, le nombre 0.9^n se rapproche de 0.

Suites Arithmétiques

Définition. Une suite est arithmétique lorsque **pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours un même nombre**, appelé raison.

Remarque : si on enlève toujours le même nombre alors la raison sera négative.

Ex.

Ex de valeur	15	20	25	30
Terme	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...

$+r \quad +r \quad +r \quad +r$

Formule 1. Comme le montre les 3 dernières colonnes, dire qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r revient à dire que $u_{n+1} = u_n + r$.

Cette formule est contraignante. Pour calculer u_{20} , il faut connaître tous les termes d'avant !! La suivante est plus pratique !

Formule 2.

Si (u_n) est arithmétique de raison r , et
 → de premier terme u_0 , on a : $u_n = u_0 + nr$.
 → de premier terme u_1 , on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Variation - Limites.

Si (u_n) est arithmétique de raison r , et
 → $r > 0$ alors la suite est croissante.
 De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 → $r < 0$ alors la suite est décroissante.
 De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Somme des termes.

La somme termes de n termes d'une suite arithmétique est égale à $S = n \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

Par exemple :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

(ici, il y a $n+1$ termes).

Exemple de Situation.

On étudiera souvent l'évolution d'une capitalisation à intérêts simples.

Cela signifie qu'on a un capital initial, noté C_0 , et que **toutes les années on rajoute la même somme r** .

Suites Géométriques

Définition. Une suite est géométrique lorsque **pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre**, appelé raison.

Remarque : si on divise toujours par le même nombre x alors la raison sera $q = \frac{1}{x}$.

Ex.

Ex de valeur	15	20	25	30
Terme	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...

$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q$

Formule 1. Comme le montre les 3 dernières colonnes, dire qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q revient à dire que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Cette formule est contraignante. Pour calculer u_{20} , il faut connaître tous les termes d'avant !! La suivante est + pratique !

Formule 2.

Si (u_n) est géométrique de raison q , et
 → de premier terme u_0 , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
 → de premier terme u_1 , on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Variation - Limites.

Si (u_n) est géométrique de raison q , **de premier terme $u_0 > 0$** et :
 → de raison $q > 1$ alors la suite est croissante.
 De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 → de raison $0 < q < 1$ alors la suite est décroissante.
 De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Somme des termes.

La somme termes de n termes d'une suite géométrique est égale à $S = \text{premier} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Par exemple :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ si } q \neq 1$$

(ici, il y a $n+1$ termes).

Exemple de Situation.

On étudiera souvent l'évolution d'une capitalisation à intérêts composés.

Cela signifie qu'on a un capital initial, noté C_0 , et que **toutes les années on applique un taux $t\%$ sur l'année précédente** (on a alors $q = 1 + t$).

EXERCICE 01

Une entreprise commence cette année la fabrication de systèmes d'alarme pour piscines de particuliers.

La production sera la première semaine $u_1 = 2000$.

Puis l'entreprise prévoit d'augmenter sa production chaque semaine de 10%.

On désigne par u_n , le nombre de systèmes fabriqués la n -ième semaine.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 .
2.
 - a. Quel coefficient multiplicateur permet de passer de u_1 à u_2 ? de u_2 à u_3 ?
 - b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
3. Calculer la production la 20^{ème} semaine (arrondir à l'unité).
4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines. Le résultat sera donné arrondi à l'unité.

EXERCICE 02

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville V et on veut étudier plusieurs modèles d'évolution. En 2005, la population de la ville V est estimée à 10 000 habitants.

Partie I : étude de deux modèles

1. Première hypothèse de croissance

En analysant l'évolution récente, on fait d'abord comme hypothèse que la population de la ville V va augmenter de 500 habitants par an.

On note $u_0 = 10\,000$ la population en 2005, et u_n la population en $(2005 + n)$.

- a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- b. Exprimer u_n en fonction de n .
- c. En quelle année la population atteindra-t-elle 20 000 habitants ?

2. Deuxième hypothèse de croissance

On travaille avec l'hypothèse d'une augmentation de 4,7% par an.

On note v_n la population en $(2005 + n)$. Nous avons alors $v_0 = 10\,000$.

- a. Quelle sera la population en 2006 ? En 2007 ?
- b. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Exprimer v_n en fonction de n .
- c. Calculer la population de la ville en 2020.
En examinant l'évolution de villes comparables, des experts ont estimé que la population de la ville V considérée allait doubler en 15 ans.
- d. Le résultat trouvé en 2. c. vous paraît-il correspondre à ce que pensaient les experts ?

Partie II : analyse des résultats sur tableur

On veut utiliser un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles :

	A	B	C	D
1	Année	u_n	v_n	
2	2005			
3	2006			
4	2007			
5	2008			
6	2009			
7	2010			
8	2011			
9	2012			
10	2013			
11	2014			
12	2015			

1. Quelle formule faut-il entrer en B3, pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs de la suite (u_n) ?
2. Quelle formule faut-il entrer en C3, pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs de la suite (v_n) ?
3. En cellule B8, quel sera alors le résultat affiché ?

Exercice 01 Corrigé

Une entreprise commence cette année la fabrication de systèmes d'alarme pour piscines de particuliers. La production sera la première semaine $u_1 = 2000$.

Puis l'entreprise prévoit **d'augmenter sa production chaque semaine de 10%**.

On désigne par u_n , le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine.

1. Pour augmenter un nombre de 10% on le multiplie par 1.1 donc : $u_2 = 2000 \times 1.1 = 2200$,
 $u_3 = 2200 \times 1.1 = 2420$ et $u_4 = 2420 \times 1.1 = 2662$.
2.
 - a. Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de u_1 à u_2 ou de u_2 à u_3 est 1.1.
 - b. De même pour passer de la production de la nième semaine à la suivante, on multiplie par 1.1 donc : $u_{n+1} = 1.1 \times u_n$.
 - c. Par définition, d'après la question précédente, la suite (u_n) est géométrique de raison 1.1.
1. On a par conséquent $u_n = u_1 \times q^{n-1} \Rightarrow u_{20} = 2000 \times 1.1^{19} \approx 12232$.
2. La production totale au cours des 20 premières semaines est donnée par
$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = u_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 2000 \frac{1 - 1.1^{20}}{-0.1} \approx 114550.$$

Exercice 02 Corrigé

En 2005, la population de la ville est estimée à 10000 habitants.

Partie I

- 1.** On suppose que la population augmente de 500 habitants par an et on pose u_n la population en 2005+n.

a. Par définition, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 500 : la suite u_n est donc arithmétique de raison 500, de premier terme $u_0 = 10000$.

b. D'après les résultats sur les suites arithmétiques, $u_n = u_0 + nr$ soit ici $u_n = 10000 + 500n$.

c. Cherchons n tel que $u_n \geq 20000 \Leftrightarrow 10000 + 500n \geq 20000 \Leftrightarrow 500n \geq 10000 \Leftrightarrow n \geq \frac{10000}{500} = 20$: donc c'est à partir de l'année 2025 que la population a plus que doublé par rapport à son premier terme.

- 2.** Supposons maintenant que la population augmente de 4.7% par an.

a. Pour augmenter un nombre de 4.7% on le multiplie par 1.047 :

en 2006 : il y a $10000 \times 1.047 = 10470$ habitants.

en 2007 : il y a $10470 \times 1.047 \approx 10962$ habitants environ.

b. Notons v_n la population en 2005+n : pour passer d'un terme au suivant, on augmente de 4.7% donc on multiplie par 1.047. La suite est donc géométrique, de raison 1.047 et de premier terme $v_0 = 10000$.

D'après le cours, $v_n = u_0 q^n$ soit ici $v_n = 10000 \times 1.047^n$.

c. En 2020, soit pour $n = 15$, la population est estimée à $v_{15} = 10000 \times 1.047^{15} \approx 19916$ habitants.

d. La population double quand elle atteint les 20000 habitants. Selon le modèle précédent, en 15 ans, la population atteint 19916 habitants environ. L'estimation des experts est donc valable.

Partie II

- 1.** En cellule B3, la formule à rentrer est la suivante : « =B2 +500 ».
2. En cellule C3, la formule à rentrer est la suivante : « =C2 * 1.047 ».
3. Le résultat affiché en B8 sera u_8 , cad 14000.