Bac blanc TCF-TM 2009 - 2010

Durée : 3 heures, Calculatrice autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif, les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Un annexe est à rendre avec la copie.

I (4 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une seule réponse est exacte On vous demande de recopier la réponse qui vous parait exacte, aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute de points. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice sera* 0.

1. Une année, le prix d'une matière première a augmenté de 25%, l'année suivante le prix de cette matière première a diminué de 22%.Globalement, sur les deux années, le prix a :
□ augmenté de 3 % □ augmenté de 5,5 % □ diminué de 2,5 % □ ni diminué ni augmenté

2. Un capital est placé au taux annuel de 3,2 %, à intérêts composés, pendant 7 ans.
Le taux global d'augmentation de ce capital pour les 7 années (arrondi au dixième) est :
□ 24,7 % □ 22,4 % □ 21,8 % □ 34,5 %

3. Un taux annuel de placement de 9%, à intérêts composés, correspond à un taux mensuel équivalent (arrondi au dixième) de :
□ 1,08 % □ 0,72 % □ 0,75 % □ 1,20 %

4. Le prix d'un article augmente de 47 %. Pour revenir au prix initial, il faudrait le diminuer d'environ :
□ 32 % □ 47 % □ 53 % □ 68 %

II (5 points)

Le 1er janvier suivant la date de sa naissance, les grands parents de Katia lui ouvrent un livret d'épargne et déposent un capital de 100 euros. Ils déposent ensuite 100 € sur ce livret tous les 1er janvier suivants.
Ce placement est à intérêts composés au taux annuel de 3 % fixe pour toute la durée du livret d'épargne.
Les intérêts sont versés tous les 1er janvier.
On pose $c_0 = 100$.
Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On note c_n le capital, exprimé en euros, se trouvant sur le livret le 1er janvier au terme d'un nombre n d'années de placement. On définit ainsi une suite c telle que $c_0 = 100$ et $c_1 = 203$.

1. Justifier que $c_2 = 309,09$ et que $c_3 \approx 418,36$.
2. La suite c peut-elle être arithmétique ? Peut-elle être géométrique ? Justifier chaque réponse.
3. Le tableau ci-dessous est un extrait d'une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur.

   Il donne notamment les premiers termes de la suite c. Le format d'affichage est un format numérique à deux décimales.

	A	B	C	D
1	Valeurs de n	Capital se trouvant sur le livret au terme de n années de placement	Intérêts acquis au cours de l'année	Taux
2	0	100,00	3,00	0,03
3	1	203,00	6,09	
4	2	309,09	9,27	
5	3	418,36	12,55	
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12			
15	13			
16	14			
17	15			
18	16			
19	17			
20	18			

Donner des formules qui, entrées dans les cellule B3 et C3, permettent par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellules B3 : C20.

4. On note désormais $u_n = 100 \times 1,03^n$.

4a. Quelle est la nature de la suite u_n ?

4b. On admet que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on a $c_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exprimer c_n en fonction de n.

4c. Déterminer le capital de Katia le soir du 1er janvier suivant son 18ème anniversaire.

III (5 points)

Le tableau ci dessous retrace l'évolution sur une vingtaine d'années du record du monde de natation à l'épreuve du 100 mètres nage libre Hommes.

	Année	Rang de l'année x_i	Temps en secondes y_i
Rowdy Gaine	1981	1	49,36
Matt Biondi	1985	5	48,95
Matt Biondi	1986	6	48,74
Matt Biondi	1988	8	48,4
Alexander Popov	1994	14	48,21
Pieter Van Hoogenband	2000	20	47,84

Source : Site officiel du mouvement olympique.

Une représentation du nuage de points (x_i ; y_i) est donnée en **annexe 1 à rendre avec la copie**.

1a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de *y* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).
Pour l'étude qui suit, on retient comme ajustement affine la droite D d'équation y = -0,08x + 49,2.
1b. Tracer la droite D sur le graphique de l'annexe 1 à rendre avec la copie.
1c. En utilisant ce modèle d'ajustement, donner une estimation du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre Hommes en 2008.

2a. Calculer le taux d'évolution du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre Hommes entre 1981 et 2000 (arrondir le résultat à 0,01 %).
2b. Sur les dix neuf années de 1981 à 2000, le temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre Hommes a été amélioré chaque année en moyenne de 0,164 %.
Expliquer comment obtenir ce résultat.
2c. On suppose qu'à partir de l'année 2000 l'évolution va se poursuivre sur le même rythme, c'est-à-dire que chaque année le temps de ce record baissera de 0,164 %.
Calculer, selon ce modèle, une estimation du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre Hommes en 2008.
3. Pendant les jeux olympiques de Pékin, lors de l'été 2008, Eamon Sullivan a abaissé le temps du record à 47,05 secondes.
Parmi les deux modèles précédents, indiquer celui qui donne la meilleure approximation.

IV (6 points)

Partie A
On considère la fonction f définie sur $[0\,;15]$ par : $f(x) = 2\ln(x+1)+1$
1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;15]$.
1a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;15]$
1b. Etablir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;15]$
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir au dixième).

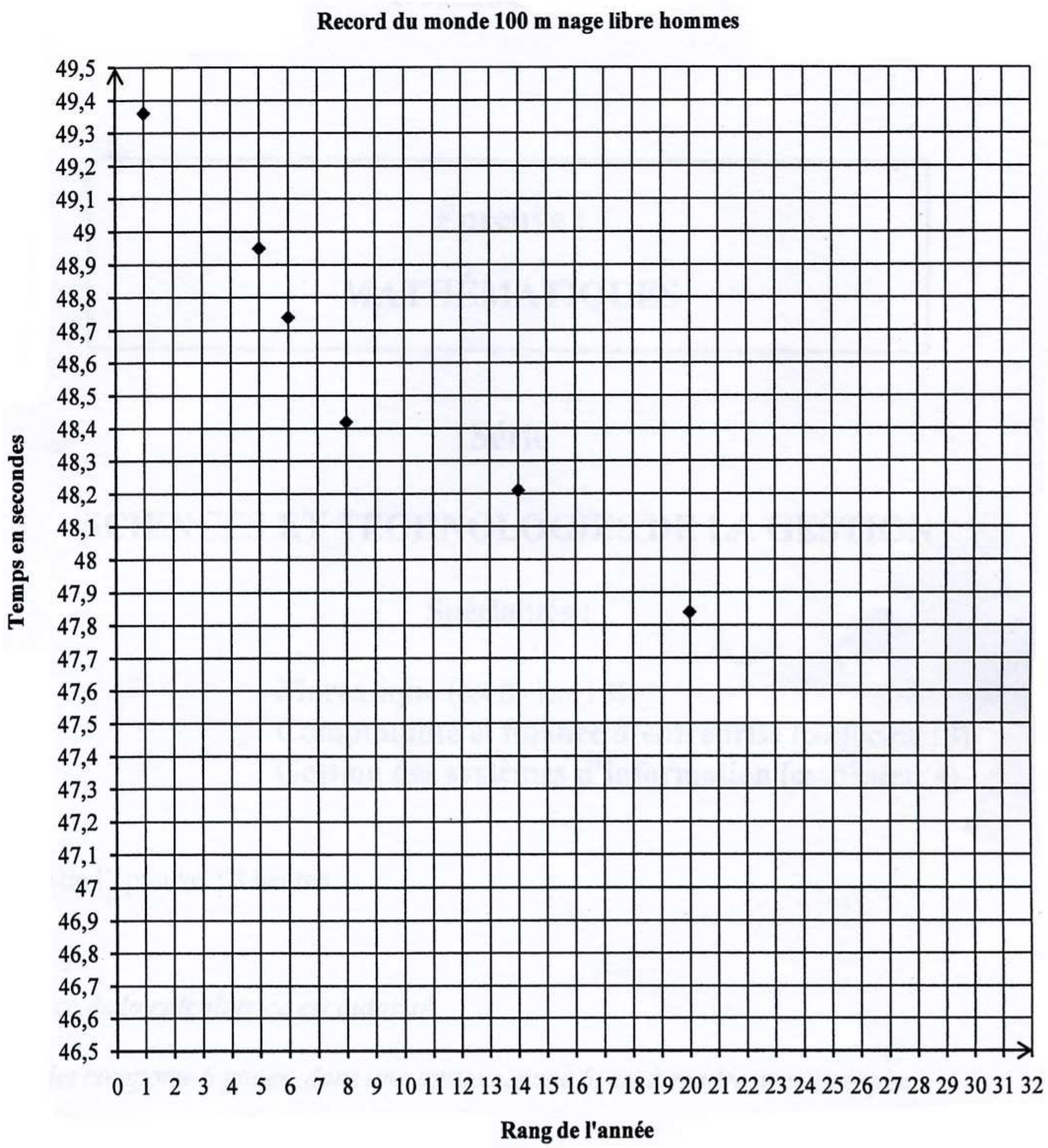
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$			3,2					5,2								

3. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (unité : 1cm)
4. Soit D la droite d'équation : $y = 0,8x$. Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

Partie B
Une entreprise fabrique des pièces pour avion. On note x ($0 \le x \le 15$) le nombre de pièces fabriquées par mois.
Chaque mois , les coûts de production , exprimés en milliers d'euros , sont donnés par : $f(x) = 2\ln(x+1)+1$.
Le prix de vente d'une pièce est 0,8 milliers d'euros .
1. Si l'entreprise vend x pièces , déterminer la recette exprimée en milliers d'euros .
2. Vérifier que le bénéfice mensuel est : $B(x) = 0,8x - 1 - 2\ln(x+1)$.
3. Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$, puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire.
4. En justifiant graphiquement la réponse, donner le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
5. Vérifier algébriquement la question précédente en dressant le tableau de variation de la fonction B.

NOM :

Annexe 1 à rendre avec la copie



CORRIGE *sommairement rédigé*
Bac blanc TCF-TM 2009 - 2010

Exercice I

1. Une année, le prix d'une matière première a augmenté de 25%, l'année suivante le prix de cette matière première a diminué de 22%.Globalement, sur les deux années, le prix a :
□ augmenté de 3 % □ augmenté de 5,5 % □ diminué de 2,5 % □ ni diminué ni augmenté

En effet, $1,25 \times 0,78 = 0,975$ *et 0,975 – 1 = 2,5%.*

2. Un capital est placé au taux annuel de 3,2 %, à intérêts composés, pendant 7 ans.
Le taux global d'augmentation de ce capital pour les 7 années (arrondi au dixième) est :
□ 24,7 % □ 22,4 % □ 21,8 % □ 34,5 %

Il suffit de remarquer que $\left(1+\frac{3,2}{100}\right)^7 \approx 1,247$.

3. Un taux annuel de placement de 9%, à intérêts composés, correspond à un taux mensuel équivalent (arrondi au dixième) de :
□ 1,08 % □ 0,72 % □ 0,75 % □ 1,20 %

En effet, $1,09^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,72\%$.

4. Le prix d'un article augmente de 47 %. Pour revenir au prix initial, il faudrait le diminuer d'environ :
□ 32 % □ 47 % □ 53 % □ 68 %

Rappelons nous de la formule d'un taux réciproque : $T = \frac{1}{1,47} - 1 \approx 32\%$.

Exercice II

1. D'après l'énoncé, $c_2 = 1,03c_1 + 100 = 1,03 \times 203 + 100 = 309,09$ et $c_3 = 1,03c_2 + 100 = 1,03 \times 309,09 + 100 \approx 418,36$.

2. > La suite n'est pas géométrique puisque pour passer de c_0 à c_1 on a multiplié par 2,03 mais pour passer de c_1 à c_2 on a multiplié par $\frac{309,09}{203} \approx 1,52$.
> La suite n'est pas arithmétique puisque pour passer de c_0 à c_1 on a ajouté par 103 mais pour passer de c_1 à c_2 on a ajouté 106,09.
Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3. Dans la cellule B3, on pourra entrer la formule « = B2*1,03 + 100 ».
Dans la cellule C3, on pourra entrer la formule « = B2*0,03 ».

4a. La suite est (u_n) géométrique puisqu'elle est sous la forme $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 100$ et q = 1,03.

4b. Posons $c_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$: d'après la formule de somme des termes d'une suite géométrique, on a $c_n = 1er\ terme \times \frac{1-q^{nbr\ de\ termes}}{1-q}$ donc ici $c_n = 900 \times \frac{1-1,03^{n+1}}{1-1,03}$.

4c. Pour son 18ème anniversaire, Katia aura $c_{18} = 900 \times \frac{1-1,03^{19}}{1-1,03} \approx 2511,69€$.

Exercice III.

1a. A l'aide de la calculatrice, on obtient comme droite d'équation des moindres carrés $y=-0,076x+49,27$.

1b. Pour tracer la droite D : y = -0,08x + 49,2 , deux points (« éloignés ») suffisent.
> Pour x = 0, y = 49,2.
> Pour x = 20, y = 47,6.

1a. 2008 correspond à x = 28 : on a y = -0,08*28 + 49,2 = 46,96. En 2008, on peut estimer le record à 46,96 secondes.

2a. On a $t=\dfrac{47,84-49,36}{49,36}\approx-3,08\%$: entre 1981 et 2000, le record a baissé d'environ 3,08%.

2b. Le taux moyen T vérifie $(1+T)^{19}=1-3,08\%\Leftrightarrow(1+T)^{19}=0,9792\Leftrightarrow T=0,9792^{\frac{1}{19}}-1\approx-0,164\%$.

2c. Si cette évolution se poursuit entre 2000 et 2008, on peut estimer le record en 2008 par $47,84\times(1-0,164\%)^{8}\approx47,22$ secondes.

3. La meilleure approximation est donnée par le premier modèle puisqu'il y a une erreur de 0,09 s contre 0,17 s pour le second modèle.

Exercice IV

A1a.
> Vu que $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$, on a $f'(x)=2\times\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}$.
> Sur [0 ; 15], x + 1 > 0 donc f ' sera positive sur cet intervalle.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;15\,]$

A1b.
On a alors :

x	0		15
f(x)			1+8ln(2)
		↗	
	1		

2. Voici le tableau de valeurs, arrondies au dixième.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	1	2,4	3,2	3,8	4,2	4,6	4,9	5,2	5,4	5,6	5,8	6	6,1	6,3	6,4	6,5

4. Pour tracer la droite D d'équation : $y=0,8x$, on place les points A(0 ;0) et B(10 ;8)

B1. Si l'entreprise vend x pièces , vu que chaque pièce est vendue 0,8 millier d'euros, la recette sera de $R(x)=0,8x$ milliers d'euros.

B2. Vu que le bénéfice est B(x) = R(x) – C(x) et que le coût est ici C(x) = f(x), on en déduit que $B(x)=0,8x-\left(2\ln(x+1)+1\right)=0,8x-2\ln(x+1)-1$.

B**3.** A l'aide la fonction précédente saisie dans la calculatrice, on obtient :
> $B(3)\approx-1,37<0$: l'entreprise est déficitaire. Elle perd 1370€ en fabriquant (et vendant) 3 pièces.
> $B(14)\approx4,78<0$: l'entreprise est rentable. Elle gagne4780€ en fabriquant (et vendant) 14 pièces.

B4.

> Une entreprise est rentable quand ses recettes dépassent les coûts. Graphiquement, on cherche donc les abscisses des points de la courbe recette (la droite) qui sont situés au dessus de la courbe coût.

> Graphiquement, l'entreprise sera rentable si elle fabrique (et vends) au moins 7 pièces.

B5. Vérifions algébriquement la question précédente en dressant le tableau de variation de la fonction B.

> On a $B(x)=0,8x-2\ln(x+1)-1$ donc $B'(x)=0,8-\frac{2}{x+1}=\frac{0,8(x+1)-2}{x+1}=\frac{0,8x-1,2}{x+1}$.

> Dressons son tableau de signe pour obtenir les variations de la fonction B :

x	0		1.5		15
0,8x – 1,2		-	0	+	
x + 1		-		-	
B'(x)		-	0	+	
B (x)	-1	↘	-1.6	↗	5.45

> La fonction B est donc croissante sur [1.5 ; 15] et comme B(x) = 0 pour x environ égal à 6,2, on peut affirmer qu'à partir de x = 7, la fonction B est positive donc l'entreprise est rentable.

La lecture graphique précédente est confirmée.