

1. Loi de probabilité sur un ensemble fini:

a) L'expérience aléatoire:

Définitions:

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles sans savoir avant l'expérience celui qui sera réalisé.
- Un **événement** ou **issue** est un de ces résultats possibles.
- L'**univers** est l'ensemble de toutes les issues. On le note généralement Ω .

Exemples:

L'expérience E1 est la suivante: « On lance 2 fois une pièce de monnaie de 2 € et on note le côté Pile ou Face obtenu pour chaque lancer. » Cette expérience est.....
Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire:

L'expérience E2 suivante « On place une bille sur un plan incliné amovible qu'on oriente jusqu'à ce que la bille glisse et tombe. On relève la mesure de l'angle de l'inclinaison. » n'est pas aléatoire car.....

b) Loi de probabilité:

Soit l'univers $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

Définition:

La **loi de probabilité P** sur l'univers Ω associe à chaque issue x_i de l'expérience E un réel positif ou nul p_i , tel que la **somme des p_i soit égale à ...**

Le réel p_i est appeléde l'issue x_i .

Modéliser une expérience aléatoire E, c'est lui associer un univers Ω et une loi de probabilité sur Ω .

En résumé,

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

La loi de probabilité P associée à l'expérience aléatoire E est constituée par la donnée des valeurs $p_1; p_2; \dots; p_n$.

Lorsque les n issues de l'expérience aléatoire E ont la même probabilité, on dit qu'elles sontet que la loi de probabilité P sur Ω est **équirépartie**.

Exemples:

Si l'on suppose une pièce de 2 € bien équilibrée, une modélisation de l'expérience aléatoire E : « On lance 2 fois une pièce de 2 € » est obtenue en choisissant la loi équirépartie sur l'univers des couples.

x_i	(f,f)	(f,p)	(p,f)	(p,p)
p_i

Si l'on s'intéresse qu'au nombre de « Pile » obtenus, on peut proposer le modèle suivant où la loi n'est pas équirépartie.

e'_i	0 pile	1 pile	2 pile
p'_i

Exercice: Modéliser quelques situations

Associer un couple (Ω, P) à chacune des expériences aléatoires suivantes:

1. E_1 : On lance un dé cubique bien équilibré
2. E_2 : On lance un dé tétraédrique « pipé » tel que le « 1 » ait deux fois plus de chances de sortir que les autres numéros.
3. E_3 : On s'intéresse à la probabilité de naître « fille » ou « garçon »
4. E_4 : On choisit au hasard une famille française ayant deux enfants et on s'intéresse au nombre de filles (on suppose l'équiprobabilité des sexes à la naissances et on exclut les naissances multiples)

c) Choix d'un modèle:

Une expérience aléatoire étant donnée, il est parfois possible de la modéliser par un raisonnement qui s'appuie sur les hypothèse de l'énoncé, comme lors de notre exercice précédent.

Néanmoins, il peut arriver qu'aucun modèle ne se dessine simplement ou que l'on hésite entre plusieurs. Dans ce cas, on peut envisager une estimation des probabilités en s'appuyant sur les fréquences observées.

➤ ***Consultation des fréquences et loi des grands nombres:***

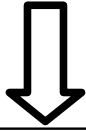
Pour évaluer concrètement les chances de voir se réaliser lors d'une expérience E chacune des issues x_1, x_2, \dots, x_n ; on s'intéresse aux **fréquences d'apparition** f_1, f_2, \dots, f_n de ces issues lorsqu'on répète l'expérience k fois dans les mêmes conditions.

Cette distribution de fréquences associée à l'échantillon des résultats des k répétitions de E varie d'un échantillon à un autre (c'est lad'échantillonnage) mais cette fluctuation s'atténue lorsque k augmente.

Pour k **suffisamment grand**, cette distribution de fréquences se stabilise et fournit une estimation de la distribution de probabilités.

On peut schématiser cela par:

Sur k expériences: distribution empirique				
x_i	x_1	x_2	...	x_n
f_i	f_1	f_2	...	f_n



Quand k prend des valeurs infiniment grandes

Pour une expérience: distribution théorique				
x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Remarque:

La distribution des fréquences empiriques (f_1, f_2, \dots, f_n) , qui dépend de l'échantillon considéré, se rapproche de la distribution des probabilités théoriques (p_1, p_2, \dots, p_n) , qui ne dépend plus que de l'expérience E et du modèle choisi.

Cette loi fut énoncée par Jacques Bernoulli en 1713.

Loi des grands nombres:

Si l'on répète k fois, dans les mêmes conditions, une expérience aléatoire E , la fréquence d'un événement de E se rapproche, lorsque k tend vers $+\infty$ de la probabilité p que cet événement se réalise lors d'une seule expérience.

➤ Le modèle de la loi équirépartie:

Le modèle dont la loi de probabilité est équirépartie est à privilégier dès qu'il est possible de faire le choix d'un univers Ω dont les issues sont équiprobables.

Le choix de ce modèle peut-être influencé:

- Par l'énoncé: il fournit des indices comme « tirage au hasard »; « dés équilibrés »; « boules indiscernables au toucher ».
- Par l'observation d'une distribution de fréquences quasi-égales. C'est souvent à partir d'un modèle de loi équirépartie que l'on accède à un autre modèle de loi non équirépartie.

Exercice: Choisir un modèle

L'expérience aléatoire E consiste à tirer au hasard 2 boules d'une urne contenant 1 boule rouge et 4 boules bleues et à noter le nombre de boules rouges obtenue.

Quel modèle peut-on adopter parmi les trois proposés ?

Modèle 1			Modèle 2			Modèle 3		
e_i	0 rouge	1 rouge	e_i	0 rouge	1 rouge	e_i	0 rouge	1 rouge
p_i	0,5	0,5	p_i	0,6	0,4	p_i	0,7	0,3

1) Réflexion a priori:

Il s'agit de déterminer les probabilités p_0 et p_1 devant être affectées aux issues « 0 rouge » et « 1 rouge ». Que peut-on penser de la loi équirépartie du modèle 1 ? Peut-on choisir entre le modèle 2 et 3 ?

2) Simulation:

Pour départager les modèles, on a simulé avec un tableur le tirage de deux boules au hasard dans cette urne. On répète k fois ce tirage et on calcule la fréquence f_k de l'issue « 1 rouge ».

On obtient 10 échantillons pour les différentes valeurs de k :

f_{10}	0,6	0,4	0,2	0,1	0,3	0,8	0,3	0,2	0,4	0,2
f_{100}	0,42	0,39	0,47	0,44	0,37	0,37	0,50	0,36	0,37	0,44
f_{1000}	0,412	0,409	0,395	0,400	0,402	0,404	0,414	0,397	0,402	0,386

a) Calculer la moyenne et l'écart-type de chaque série de fréquences.

Quel modèle paraît le plus en adéquation avec les données observées ?

b) Visualiser sur une calculatrice les diagrammes en boîtes superposés de ces trois séries et commenter.

.....

2. Nombre d'éléments d'un ensemble fini:

a) Cardinal d'un ensemble fini:

Définition:

Soit n un entier naturel.

Lorsqu'un ensemble Ω a n éléments, on dit que Ω est un ensemble fini. On dit alors que son cardinal est n et on note $\text{Card } \Omega = n$

Exemple:

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble fini à 3 éléments. Nous avons:

$\text{Card } \Omega = \dots$

L'ensemble vide noté \emptyset , a pour cardinal \dots Nous notons: $\text{Card } \emptyset = 0$.

b) Inclusion:

Définition:

Dire qu'un ensemble Ψ est une partie de Ω (ou que Ψ est un sous-ensemble de Ω) signifie que tous les éléments de Ψ sont des éléments de Ω . On note $\Psi \subset \Omega$.

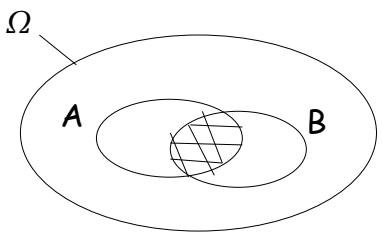
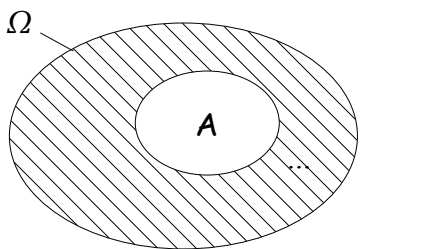
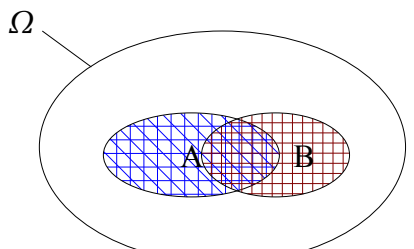
Par convention, l'ensemble vide est une partie de n'importe quel intervalle.

Exemple:

Si $\Omega = \{a, b, c\}$, les parties de Ω sont: \dots

c) Intersection, complémentaire et réunion:

Soit Ω un ensemble fini et A et B deux parties de Ω .

 <p>L'ensemble $A \cap B$ est constitué de tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.</p>	 <p>Le complémentaire de A dans Ω, noté \bar{A}, est constitué de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.</p> <p>$Card \bar{A} = Card \Omega - Card A$</p>	 <p>L'évènement $A \cup B$ est constitué de tous les éléments qui sont dans <u>A ou dans B.</u></p> <p>$Card A \cup B = Card A + Card B - Card (A \cap B)$</p>
---	--	---

Remarques:

- Si $A \cap B = \emptyset$, les ensembles A et B sont
- Un élément qui est dans A ou dans B peut être aussi dans les deux ensembles à la fois: on dit que le « ou » est **inclusif**.

3. Probabilités et évènements:

Soit E une expérience aléatoire d'univers associé $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

a) Probabilité d'un événement:

Un événement lié à E est un événement qui peut être réalisé ou non, selon le résultat de E. En le confondant avec l'ensemble des résultats de E qui le réalisent, un événement devient une partie de Ω .

Définitions:

Un événement A est **une partie** de l'univers Ω .
 Un événement est **élémentaire** s'il n'est réalisé que par **une seule issue**.
 L'**évènement impossible** n'est **jamais réalisé** : $A = \emptyset$.
 L'**évènement certain** est réalisé par **toute issue** de E: $A = \Omega$.

Exemple:

Soit E: « On lance 2 fois une pièce » d'univers $\Omega = \{(f,f); (f,p); (p,f); (p,p)\}$.

- L'évènement « obtenir une fois face » s'écrit: ...
- L'évènement « obtenir deux fois pile » est l'évènement élémentaire $\{(p,p)\}$.

La probabilité d'un événement A non vide est le réel, noté $P(A)$, égal à la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Propriétés:

P1:

- $P(\Omega)=1$
- $P(\emptyset)=0$
- Pour tout événement A , $0 \leq P(A) \leq 1$.

P2:

Si la loi de probabilité P est équirépartie et si A est un événement réalisé pour k issues, alors :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Démonstration:

La loi P étant équirépartie sur Ω , la probabilité de chacune des n issues est égales à $\frac{1}{n}$ et l'évènement A , qui comprend k issues, a pour probabilité: $P(A) = \frac{k}{n}$.

Exemple:

Si le lancer d'un dé tétraédrique pipé à pour modèle:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Alors $P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = p_2 + p_4 = \dots$

En revanche, si le dé est bien équilibré et donc modélisé par une loi équirépartie, alors $P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = \dots = 0,5$

b) Opérations sur les évènements et règles de calculs:

Définitions:

Si A et B sont deux évènements:

- $A \cap B$ est réalisé lorsque **A et B sont tous les deux réalisés.**
- $A \cup B$ est réalisé lorsque **A ou B (au moins l'un) est réalisé.**
- \bar{A} , **évènement contraire de A** , est réalisé lorsque **A ne l'est pas.**
- A et B sont dits **incompatibles** ou **disjoints** s'ils **ne peuvent se réaliser simultanément.**

Propriétés:

Soit A et B deux évènements et P une loi de probabilité sur Ω .

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Lorsque A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Plus généralement, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice: Changer de langage

Soit E l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons, de couleur et numérotés. L'univers choisi est $\Omega = \{R1 ; J1 ; J2 ; V1 ; V2 ; V3\}$, où R signifie « jeton rouge n°1 ».

1) Écrire les évènements suivants comme des parties de Ω :

A: « le jeton est jaune » B: « le jeton est vert » C: « le jeton porte un numéro supérieur à 1. »

2) Montrer que les évènements suivants peuvent s'écrire en fonction de A, B et C:

D: « la boule n'est pas rouge » E: « obtenir 1 » F: « obtenir J2 »

3) Interpréter simplement en langage usuel:

$$\overline{A} \cap \overline{B} , A \cup B \cup \overline{C} .$$

Exercice: Changer d'univers

On reprend l'expérience de l'exercice précédent.

1) Proposer une loi de probabilité P sur l'univers $\Omega = \{R1 ; J1 ; J2 ; V1 ; V2 ; V3\}$.

2) Désormais, on ne se soucie plus des numéros portés par les jetons et l'on adopte l'univers simplifié : $\Omega' = \{R ; J ; V\}$.

Quelle loi de probabilité P' sur Ω' peut-on déduire de la loi P sur Ω ?

4. Variable aléatoire:

Définitions:

Soit $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ un univers et P une loi de probabilité sur Ω .

- On définit une **variable aléatoire X** sur Ω en associant un réel à chaque issue de Ω (X est donc une fonction de Ω dans \mathbb{R}).
- Si $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_r\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X sur l'univers Ω , alors pour tout i variant de 1 à r :
 - l'évènement « X prend la valeur x_i » est noté « $X = x_i$ »;
 - sa probabilité $P(X = x_i)$ est la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

Exemple:

Un joueur lance 2 fois une pièce bien équilibrée; il gagne 2 € par « Pile » obtenu et perd 1 € par « Face » obtenu.

On modélise l'expérience par la loi équirépartie P sur $\Omega = \{(f,f) ; (f,p) ; (p,f) ; (p,p)\}$. Le gain algébrique du joueur est une variable aléatoire X sur Ω . Elle associe aux issues $(f,f) ; (f,p) ; (p,f) ; (p,p)$ les réels respectifs: - 2 ; 1 ; 1; 4.

On a alors $P(X = -2) = P(A)$ où A est l'évènement «obtenir deux faces». Donc $P(X = -2) = \frac{1}{4}$.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est:

- préciser l'ensemble $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_r\}$ des valeurs prises par X.
- calculer pour chaque x_i la probabilité $P(X = x_i)$ souvent noté p_i .

Cette loi de probabilité est souvent présentée dans un tableau:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$x_1 ; x_2 ; \dots ; x_r$ sont rangés dans l'ordre croissant et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Soit X une variable aléatoire, de loi de probabilité $(x_i ; p_i)$, $1 \leq i \leq r$.

- L'**espérance de X** est le réel $E(X)$ défini par $E(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i$.
- La **variance de X** est le réel $V(X)$ défini par $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - \bar{X})^2$.
- L'**écart-type de X** est le réel $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque: l'espérance $E(X)$ de X est aussi notée \bar{X} .

Propriété:

La variance de X est égale à $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - [E(X)]^2$.

Démonstration:

Par définition, $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - \bar{X})^2$. En développant, on obtient...

puis $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^r p_i x_i + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^r p_i$ (par propriété de la somme).

On reconnaît $\sum_{i=1}^r p_i x_i = \bar{X}$ et $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ et on a bien $V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - \bar{X}^2$

Exercice: Étudier une variable aléatoire

On réutilise l'exemple précédent des pièces. On appelle X la variable aléatoire qui associe au résultat d'un lancer le gain algébrique du joueur.

- 1) Donner la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat. Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Quelle devrait être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?
- 3) Calculer la variance et l'écart-type de X. Que mesurent ces paramètres ?