Avril 2010.

Mathématiques. TS. 1 heure.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 (4 pts)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1. I = IR et $f(x) = 5x^2\left(1-x^3\right)^4$

2. I = IR et $f(x) = \dfrac{5x}{\left(4x^2+1\right)^3}$

3. I = IR et $f(x) = -x\sqrt{3x^2+1}$

4. I = IR_*^+ et $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 (3 pts)

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$.

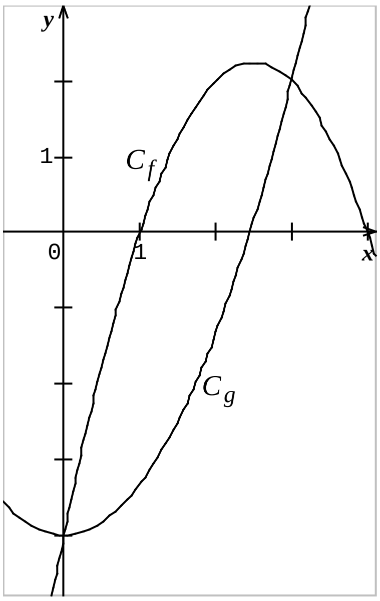
Exercice 3 (2 pts)

A l'aide d'un intégration par partie, déterminer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$

Exercice 4 (3 pts)

A l'aide d'un intégration par partie, déterminer la primitive de $t \to te^{-2t}$ qui s'annule en 1.

Exercice 5 (4 pts)



Sur le graphique ci–contre sont représentées les fonctions f et g définies sur IR, par f(x) = $-x^2 + 5x - 4$ et g(x) = $\frac{2}{3}x^2 - 4$

Déterminer l'aire du domaine limité par les deux courbes.
Vous justifierez le calcul de votre intégrale.

Exercice 6 (4 pts)

On définit une suite numérique par $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^n(x)dx$

1. Montrer que la suite (u_n) est positive.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3. La suite (u_n) peut-elle converger ?

Exercice 1 - Corrigé

on notera F **une** primitive de f pour chaque question.

(1) I = IR et $f(x)=5x^2\left(1-x^3\right)^4$:

$f(x)=5x^2\left(1-x^3\right)^4=-\frac{5}{3}\times(-3x^2)\left(1-x^3\right)^4=-\frac{5}{3}u'u^4$ dont une primitive est $-\frac{5}{3}\times\frac{u^5}{5}=-\frac{u^5}{3}$.

Ainsi $F(x)=-\frac{\left(1-x^3\right)^5}{3}$.

(2) I = IR et $f(x)=\frac{5x}{\left(4x^2+1\right)^3}$

$f(x)=\frac{5x}{\left(4x^2+1\right)^3}=\frac{5}{8}\times\frac{8x}{\left(4x^2+1\right)^3}=\frac{5}{8}\times\frac{u'}{u^3}$ dont une primitive est $\frac{5}{8}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{u^2}=-\frac{5}{16}\times\frac{1}{u^2}$.

Ainsi $F(x)=-\frac{5}{16\left(4x^2+1\right)^2}$.

(3) I = IR et $f(x)=-x\sqrt{3x^2+1}$

$f(x)=-x\sqrt{3x^2+1}=-x\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}\times 6x\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}u'u^{\frac{1}{2}}$ dont une primitive est $-\frac{1}{6}\times\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{9}u^{3/2}$.

Ainsi $F(x)=-\frac{1}{9}\left(3x^2+1\right)^{3/2}=-\frac{1}{9}\left(3x^2+1\right)\sqrt{3x^2+1}$.

(4) I = IR_*^+ et $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=2\times\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=2\times u'e^u$ dont une primitive est $2e^u$.

Ainsi $F(x)=2e^{\sqrt{x}}$

Exercice 2 - Corrigé

(a) $\frac{3x}{x^2+1}=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\frac{3}{2}\ln\left(|u|\right)\overset{u>0}{=}\frac{3}{2}\ln(u)$. Ainsi, $I=\frac{3}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{3}{2}\ln(2)$.

(b) $\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{x}\times\ln(x)=u'u$ dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$. Donc $J=\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$.

Exercice 3 - Corrigé

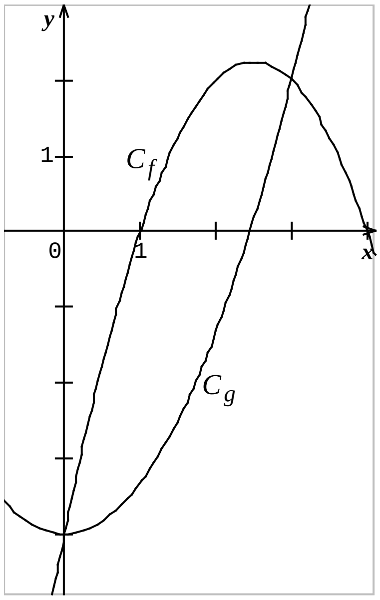
On a $\begin{cases}u=x\\ v'=\cos(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=\sin(x)\end{cases}$ donc $I=[x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx=\frac{\pi}{2}-[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}$.

Exercice 4 - Corrigé

La fonction cherchée est par définition $F(x)=\int_1^x te^{-2t}dt$.

On a $\begin{cases}u=t\\ v'=e^{-2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{cases}$ d'où $I=[-\frac{t}{2}e^{-2t}]_1^x-\int_1^x-\frac{1}{2}e^{-2t}dt=\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{x}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}[-\frac{t}{2}e^{-2t}]_1^x=\frac{1}{4}\left(3e^{-2}\right)+e^{-2x}\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

Exercice 5 - Corrigé



Sur le graphique ci–contre sont représentées les fonctions f et g définies sur ℝ, par $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ et $g(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4$

Avant de déterminer l'aire du domaine limité par les deux courbes, nous allons déterminer les points d'intersection de C_f et C_g (la lecture graphique n'est qu'une lecture…).

→**Pour déterminer les points d'intersections des deux courbes, on résout l'équation f(x) = g(x).**

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow ...$

$\Leftrightarrow \frac{-5}{3}x^2 + 5x = 0$

$\Leftrightarrow 5x(\frac{-1}{3}x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

→Déterminons l'aire cherchée **(en unités d'aires)**:

Le graphique nous indique que : sur [0 ; 3], C_f est au dessus de C_g.
> On le vérifie facilement par le calcul, en étudiant le signe du trinôme f(x) – g(x).
> La fonction f – g est donc continue et positive que [0 ;3].
Soit A l'aire cherchée :

$A = \int_0^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 (\frac{-5}{3}x^2 + 5x)\,dx = [\frac{-5}{9}x^3 + \frac{5}{2}x^2]_0^3 = \frac{-5}{9}3^3 + \frac{5}{2}3^2 = -15 + 45/2 = 15/2$ **u.a.**

Exercice 6 (4 pts)

On définit une suite numérique par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^n(x)dx$

1. Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $0 \le \cos(x)$ donc $0 \le e^x \cos(x)$: une intégrale conserve le signe donc $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^n(x)dx \ge 0$.

2.

$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^{n+1}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)\right)dx$ par linéarité de l'intégrale.

On a donc $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^n(x)\left(\cos(x) - 1\right)dx$ **:** mais sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $0 \le \cos(x) \le 1$ et donc $\cos(x) - 1 \le 0$.

Comme $e^x \cos^n(x) \ge 0$ sur I, d'après la positivité de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \le 0$ donc la suite décroît.

3. La suite (u_n) converge puisqu'elle est décroissante, minorée par 0.