

Exercice 1 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

L'unité graphique est égale à 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$.

2. On considère les points du plan A et B d'affixe respectives :

$$z_A = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ et } z_B = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

3. Soit le point C d'affixe $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$

a. Démontrer que A , B et C appartiennent à un même cercle \mathcal{C} dont on déterminera le centre et le rayon.

b. Construire le cercle \mathcal{C} et les points A , B et C . (On laissera apparaître les traits de construction).

4. Soit le point D d'affixe $z_D = 4i$. Montrer que point D a pour image le point C par la rotation de centre O

et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

5. Montrer que le point E , image du point A par la translation de vecteur \overrightarrow{OB} , appartient

Au cercle \mathcal{C} . Placer le point E sur le graphique.

Exercice 2.5 points

Dans cet exercice toutes les probabilités sont données sous forme de fraction.

Une urne contient des boules de couleur numérotées .

• Une boule blanche numérotée 1, que l'on note B_1 ;

• Deux boules rouges numérotées 2 et 3, que l'on note R_2 et R_3 ;

• trois boules vertes numérotées 1 ; 2 et 3, que l'on note V_1 , V_2 et V_3 .

Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait une boule de l'urne, puis une deuxième, sans avoir remis dans l'urne.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage, et le second celle obtenue au second tirage.

Par exemple $(R_2; V_3)$ est un résultat ; il signifie que la première boule est rouge numérotée 2

et que la deuxième boule est verte numérotée 3.

Pour répondre aux questions posées on peut s'aider d'un arbre ou d'un tableau.

a. Déterminer le nombre de résultats possibles.

b. On admet que tous les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les deux boules sont de la même couleur. »

B : « le produit des numéros inscrits sur les boules est 6. »

C : « Il y a au moins une boule blanche. »

2. Un jeu consiste à tirer 2 boules de l'urne, selon la méthode décrite dans la question 1.

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat, produit des numéros inscrits sur les deux boules.

Exemple : on associe au tirage $(B_1; V_2)$ le nombre 2 car $1 \times 2 = 2$.

a. Donner toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X .

b. Montrer que la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 9 est égale à $\frac{1}{15}$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Problème 11 points**Partie A**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln(x)$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g

1. A l'aide du tableau de signes de la fonction g' sur l'intervalle $]0; +\infty[$, indiquer les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +

3. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x}$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
b. Etudier la limite de f en $+\infty$
2. a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction dérivée de f de la fonction f définie par : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$
En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout nombre x strictement positif.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ une solution unique notée α .
b. Donner, en justifiant un encadrement d'amplitude 0,01 du nombre réel α .
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
5. Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
a. Montrer que la droite D est asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) en $+\infty$.
b. Démontrer que la droite D coupe la courbe (\mathcal{C}) en un point B d'abscisse $e^{1/2}$.
c. Etudier les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}) et de la droite D sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
6. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant comme unité graphique 2 cm, les droites T et D , ainsi la courbe (\mathcal{C}) .

Partie C

1. Hachurer sur le graphique la partie E du plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = e^{1/2}$ et $x = e$.
2. a. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.
b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c. Montrer que la valeur exacte de l'aire A de la partie du plan hachurée E est, en unité d'aire,
$$A = \frac{2e^2 + 6e - 8e^{1/2} + 1}{8}.$$

En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire A .

Problème

Partie A .

$$1. g(x) = x^2 + 3 - 2\ln(x) . g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$2. \text{ sur l'intervalle I } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{(x+1)(x-1)}{x} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1, \text{ puisque } 2 \frac{(x+1)}{x} > 0 \text{ sur l'intervalle I.}$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		4	

3. la fonction g admet un minimum strictement positive égal à 4 atteint en $x=1$, par conséquent $g(x) > 0$.

Partie B

$$1.a. f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x} . \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + 2\ln x}{2x} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\ln(x)-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2\ln(x)-1) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty .$$

En déduit que la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de 0.

$$1.b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0 \text{ (voir formulaire) , donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$2.a\&b. f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{(1/x) \times x - 1 \times (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 4 - 2\ln(x)}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

On sait que $g(x) > 0$ sur l'intervalle I, par conséquent $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I et la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		$-\infty$	$+\infty$

