

Sujet n°4

Consignes pour le candidat :

- L'épreuve orale dure environ 40 minutes : 20 minutes de préparation suivies de 20 minutes d'exposé.
- Le nombre des exercices varie entre 2 et 4, suivant l'examineur.
- L'utilisation de la calculatrice peut être autorisée par l'examineur, mais rien de moins sûr !

Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien : vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier (par exemple à l'oral) en précisant les notions de cours indispensables (**il est inutile de les rédiger complètement par écrit, comme ci-dessous**).

- La démarche et la pertinence des justifications seront valorisées.
- Des questions complémentaires peuvent vous être posées au cours du dialogue.
- *N'oubliez pas que l'oral est un **oral** !! Evitez de rester le nez sur vos notes.*

Exercice 1

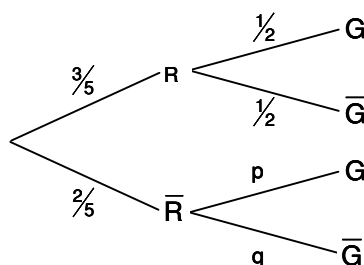
Chaque question admet **une seule** bonne réponse. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que : $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $p_A(B) = \frac{1}{4}$.

Combien vaut $p(A)$?

①	$\frac{2}{3}$	②	$\frac{1}{24}$	③	$\frac{3}{2}$	④	$\frac{1}{12}$
---	---------------	---	----------------	---	---------------	---	----------------

2. On donne l'arbre pondéré ci-contre où R et G sont deux événements d'un espace probabilisé avec : $p(G) = \frac{3}{5}$.



Quelles sont les probabilités p et q de l'arbre pondéré :

①	$p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$	②	$p = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{1}{4}$
③	$p = \frac{3}{5}$ et $q = \frac{2}{5}$	④	$p = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$

Exercice 2

Chaque question peut avoir **une seule ou plusieurs** bonnes réponses.

On donne le nombre complexe $z = -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$.

1. Un argument de z est égal à :

①	$-2 \times \arg \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$	②	$\frac{5\pi}{12}$	③	$\pi + \arg(\sqrt{3} + i) - \arg(1 - i)$	④	$-\frac{7\pi}{12}$
---	--	---	-------------------	---	--	---	--------------------

2. Le module de z est égal à :

①	$2\sqrt{2}$	②	$-2 \left \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right $	③	$2 \times (\sqrt{3} + i - 1 - i)$	④	$\frac{4}{\sqrt{2}}$
---	-------------	---	--	---	---------------------------------------	---	----------------------

Exercice 3

On considère la fonction f, définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 - e^x}$, et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal

1. Justifier que f est définie sur \mathbb{R}^* .

2. a) Montrer que la droite Δ , d'équation : $y = -2$, est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de C_f et Δ .

3. Utiliser la calculatrice pour conjecturer les variations de f.

Les prolongements possibles : Exercice 3 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et étude des variations.

Exercice 1

1. La formule $p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$ donne ici $p_A(B) = \frac{1/6}{1/4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Les événements R et \bar{R} forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales,

$$p(G) = p(G \cap R) + p(G \cap \bar{R}) \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times p \Leftrightarrow \frac{2}{5} p = \frac{3}{10} \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$$

Exercice 2

On donne $z = -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$.

1. Puisque $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$ et $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')$, on en déduit que

$$\arg(z) = \underbrace{\arg(-2)}_{\pi} + \arg\left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}\right) = \pi + \arg(\sqrt{3} + i) - \arg(1 - i).$$

Vérifions maintenant si une des autres propositions est correcte.

$$|\sqrt{3} + i| = 2 \text{ donc } \begin{cases} \cos(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\tau) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{6} \text{ et } |1 - i| = \sqrt{2} \text{ donc } \begin{cases} \cos(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \tau = -\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12}$.

Les réponses 3 et 4 sont donc correctes.

2. Utilisons les propriétés du module : $|z| = \left| -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right) \right| = 2 \times \left| \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right|$ (réponse 2).

Continuons les simplifications : comme $|\sqrt{3} + i| = 2$ et $|1 - i| = \sqrt{2}$, on trouve $|z| = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Les réponses 1, 2 et 4 sont donc correctes.

Exercice 3

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 - e^x}$, et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. Comme $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, f est définie sur \mathbb{R}^* .

2. a) Pour montrer que la droite Δ , d'équation : $y = -2$, est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2)) = 0.$$

Or $f(x) + 2 = \frac{2e^x + 1}{1 - e^x} + \frac{2 - 2e^x}{1 - e^x} = \frac{3}{1 - e^x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient le résultat voulu.

b) Pour étudier la position relative de C_f et Δ , on étudie le signe de $f(x) - (-2)$ cad celui du dénominateur.

Comme $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ (passage au \ln), on trouve que, C_f est au dessus de Δ pour $x < 0$, en dessous sinon.