

Sujet n°5

Consignes pour le candidat :

- L'épreuve orale dure environ 40 minutes : 20 minutes de préparation suivies de 20 minutes d'exposé.
- Le nombre des exercices varie entre 2 et 4, suivant l'examineur.
- L'utilisation de la calculatrice peut être autorisée par l'examineur, mais rien de moins sûr !

Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien : vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier (par exemple à l'oral) en précisant les notions de cours indispensables (**il est inutile de les rédiger complètement par écrit, comme ci-dessous**).

- La démarche et la pertinence des justifications seront valorisées.
- Des questions complémentaires peuvent vous être posées au cours du dialogue.
- *N'oubliez pas que l'oral est un **oral** !! Evitez de rester le nez sur vos notes.*

Exercice 1 Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 2 Chaque question peut avoir une seule ou plusieurs bonnes réponses.
Les questions 1 ; 2 et 3 sont indépendantes.

1. La solution de l'équation différentielle $f' = -f$ avec $f(0) = 1$, est la fonction f , dérivable sur \mathbb{R} , et définie sur \mathbb{R} par :

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1 $f(x) = -e^{-x}$ | 2 $f(x) = e^{-x}$ | 3 $f(x) = e^x$ | 4 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------------|

2. Soit A, B et C 3 points d'affixes respectives a, b et c. Si $\frac{b-c}{a-c} = -i$, alors le triangle ABC est :

- | | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------------|----------------------|
| 1 rectangle | 2 isocèle | 3 rectangle et isocèle | 4 équilatéral |
|--------------------|------------------|-------------------------------|----------------------|

3. Toute suite croissante :

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|--|------------------------------|
| 1 est minorée | 2 est non majorée | 3 est positive à partir d'un certain rang | 4 tend vers $+\infty$ |
|----------------------|--------------------------|--|------------------------------|

Exercice 3

Calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$, puis, à l'aide d'une intégration par parties : $J = \int_1^2 \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

Les prolongements possibles :

exercice 1 : forme trigonométrique des solutions.

exercice 2 : résolution d'autres équations différentielles et courbes associées.

Exercice 1

On remarque que $P(z) = z^2 + z + 1$ est l'équation d'un trinôme (à coefficients réels).

Calculons son discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3$: les racines de P sont donc des complexes conjuguées, $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \bar{z}_1$.

Exercice 2

1. Les solutions de $f' = -f$ sont les fonctions du type $f(x) = Ke^{-x}$ où K est réel. La condition initiale donne $K = 1$.
Seule 2 est correcte.

2. Supposons que $\frac{b-c}{a-c} = -i$.

- En passant au module, il vient $\frac{BC}{AC} = 1 \Rightarrow AC = BC$: le triangle ABC est isocèle en C.
- En passant à l'argument, il vient $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(-i) \Leftrightarrow (\vec{CA}, \vec{CB}) = -\frac{\pi}{2}$: il est aussi rectangle en C.

Les réponses 1, 2 et 3 sont correctes. (4 est donc impossible)

3. Si une suite est croissante, on est seulement sûr qu'elle est minorée (par son premier terme). Seul a est juste.

Exercice 3

• Calculons $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$: on reconnaît la forme $u' e^u$ dont une primitive est e^u .

Ainsi, $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[e^{-\frac{1}{t}} \right]_1^2 = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}$.

• Calculons $J = \int_1^2 \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Comme $\frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$, on pose $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \\ v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$ et la formule d'IPP donne alors, après avoir reconnu

l'intégrale I,

$$J = \left[\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} \right]_1^2 - (-I) = I + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} - e^{-1} = \frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2} - 2e^{-1}.$$