

## Sujet n°5

### Consignes pour le candidat :

- L'épreuve orale dure environ 40 minutes : 20 minutes de préparation suivies de 20 minutes d'exposé.
- Le nombre des exercices varie entre 2 et 4, suivant l'examineur.
- L'utilisation de la calculatrice peut être autorisée par l'examineur, mais rien de moins sûr !

Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien : vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier (par exemple à l'oral) en précisant les notions de cours indispensables (**il est inutile de les rédiger complètement par écrit, comme ci-dessous**).

- La démarche et la pertinence des justifications seront valorisées.
- Des questions complémentaires peuvent vous être posées au cours du dialogue.
- *N'oubliez pas que l'oral est un **oral** !! Evitez de rester le nez sur vos notes.*

### Exercice 1

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 + z + 1 = 0$ .

### Exercice 2

Chaque question peut avoir une seule ou plusieurs bonnes réponses.  
Les questions 1 ; 2 et 3 sont indépendantes.

1. La solution de l'équation différentielle  $f' = -f$  avec  $f(0) = 1$ , est la fonction  $f$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

- |          |                  |          |                 |          |              |          |                          |
|----------|------------------|----------|-----------------|----------|--------------|----------|--------------------------|
| <b>1</b> | $f(x) = -e^{-x}$ | <b>2</b> | $f(x) = e^{-x}$ | <b>3</b> | $f(x) = e^x$ | <b>4</b> | $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
|----------|------------------|----------|-----------------|----------|--------------|----------|--------------------------|

2. Soit A, B et C 3 points d'affixes respectives a, b et c. Si  $\frac{b-c}{a-c} = -i$ , alors le triangle ABC est :

- |          |           |          |         |          |                      |          |             |
|----------|-----------|----------|---------|----------|----------------------|----------|-------------|
| <b>1</b> | rectangle | <b>2</b> | isocèle | <b>3</b> | rectangle et isocèle | <b>4</b> | équilatéral |
|----------|-----------|----------|---------|----------|----------------------|----------|-------------|

3. Toute suite croissante :

- |          |             |          |                 |          |   |          |                     |
|----------|-------------|----------|-----------------|----------|---|----------|---------------------|
| <b>1</b> | est minorée | <b>2</b> | est non majorée | <b>3</b> | est positive à partir d'un certain rang | <b>4</b> | tend vers $+\infty$ |
|----------|-------------|----------|-----------------|----------|---|----------|---------------------|

### Exercice 3

Calculer l'intégrale :  $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt$ , puis, à l'aide d'une intégration par parties :  $J = \int_1^2 \frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{t}} dt$ .

### Les prolongements possibles :

*exercice 1 : forme trigonométrique des solutions.*

*exercice 2 : résolution d'autres équations différentielles et courbes associées.*

### Exercice 1

On remarque que  $P(z) = z^2 + z + 1$  est l'équation d'un trinôme (à coefficients réels).

Calculons son discriminant :  $\Delta = 1 - 4 = -3$  : les racines de P sont donc des complexes conjuguées,  $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_2 = \overline{z_1}$ .

### Exercice 2

1. Les solutions de  $f' = -f$  sont les fonctions du type  $f(x) = Ke^{-x}$  où K est réel. La condition initiale donne  $K = 1$ .

Seule 2 est correcte.

2. Supposons que  $\frac{b-c}{a-c} = -i$ .

- En passant au module, il vient  $\frac{BC}{AC} = 1 \Rightarrow AC = BC$  : le triangle ABC est isocèle en C.
- En passant à l'argument, il vient  $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(-i) \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{2}$  : il est aussi rectangle en C.

Les réponses 1, 2 et 3 sont correctes. (4 est donc impossible)

3. Si une suite est croissante, on est seulement sûr qu'elle est minorée (par son premier terme). Seul a est juste.

### Exercice 3

- Calculons  $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$  : on reconnaît la forme  $u' e^u$  dont une primitive est  $e^u$ .

$$\text{Ainsi, } I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[ e^{-\frac{1}{t}} \right]_1^2 = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}.$$

- Calculons  $J = \int_1^2 \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$  à l'aide d'une intégration par parties.

$$\text{Comme } \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}, \text{ on pose } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \\ v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{cases} \text{ et la formule d'IPP donne alors, après avoir reconnu}$$

l'intégrale I,

$$J = \left[ \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} \right]_1^2 - (-I) = I + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} - e^{-1} = \frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2} - 2e^{-1}.$$