

SUJET

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

1a. Soit la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Etudier les variations de cette fonction sur $[0 ; 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$:

$$\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}.$$

b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) \times e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

c. Par intégration, en déduire que, $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$.

d. On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Montrer que si (u_n) possède une limite L alors L est compris entre 3 et $7/2$.

2a. Vérifier que pour tout t de $[0 ; 2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b. Montrer que pour tout t de $[0 ; 2]$, on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite L .

On pose $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

1a. Soit $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ sur $I = [0 ; 2]$.

Cette fonction est dérivable et $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2} > 0$ donc cette fonction est croissante sur I . Elle conserve donc

le sens des inégalités et par conséquent $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow \varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2)$ cad $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$ (retenir la méthode qui consiste à démontrer un encadrement par l'étude d'une fonction).

1b. Une exponentielle est toujours positive donc d'après 1a, pour tout t de I , $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

1c. En passant à l'intégrale sur $[0 ; 2]$ l'encadrement ci-dessus, on obtient $\int_0^2 \frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}} dt$.

Une primitive de $t \rightarrow e^{\frac{t}{n}}$ est $t \rightarrow n e^{\frac{t}{n}}$ et on trouve finalement $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$.

1d. Rappelons que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ (redémontrer le) et supposons que la suite tend vers L.

$$n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \stackrel{h=\frac{2}{n}}{=} 2 \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 2 \text{ car quand } n \text{ tend vers l'infini, } h \text{ tend vers } 0.$$

Ainsi, en passant à la limite l'encadrement obtenu en 1c, $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$ (ce n'est pas le théorème des gendarmes mais le théorème de comparaison).

2a. $\frac{2t+3}{t+2} = \frac{2(t+2)-1}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

Par linéarité de l'intégrale, $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_0^2 2 dt - \int_0^2 \frac{1}{t+2} dt = 2[t]_0^2 - [\ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln(2)$ (car $\ln 4 - \ln 2 = \ln(4/2)$).

2b. La fonction $t \rightarrow e^{\frac{t}{n}}$ est croissante sur $[0 ; 2]$ (comme composée..) et donc sur $[0 ; 2]$, $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

La fonction φ est positive sur $[0 ; 2]$ (car supérieure à $3/2$) donc en multipliant chaque membre on obtient

$$\varphi(t) \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{2}{n}}.$$

On passe ensuite à l'intégration : $I \leq u_n \leq I e^{\frac{2}{n}}$ car $e^{\frac{2}{n}}$ est une constante.

2c. Là, on applique le théorème des gendarmes : les membres de gauche et de droite tendent tout deux vers I, donc on peut affirmer que la suite converge et qu'elle converge vers I.

Merci à ma collègue pour ce corrigé.