Amérique du Nord, 2004

Dans le plan, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.
Pour tout réel m, différent de –1/3, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : S_m = { (A;1) ; (B;m) ; (C;2m) }.
Pour tout point M du plan, on note $\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$.
Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F)

	Affirmation	V ou F
1.	G_1 est le milieu du segment [CI]	
2.	G_1 est le barycentre de { (J;2) ; (C;2/3) }	
3.	Pour tout point M, $\vec{V}_M = \vec{AB} + 2\vec{AC}$	
4.	Pour tout m, distinct de –1/3, $\vec{AG_m}$ est colinéaire à $\vec{AG_{-1}}$	
5.	$IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle	
6.	Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que P = G_m	

Il s'agit principalement d'utiliser les résultats sur les barycentres partiels.

 1. G_1 est le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;2)}

- I est le milieu de [AB] donc le barycentre de {(A ;1) (B ;1)}.
- G_1 est donc le barycentre de {(I ;2) (C ;2)} c'est à dire le milieu de [IC] $\boxed{\text{1. est vraie}}$

 2. G_1 est le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;2)} donc de {(A;1) ; (B;1) ; (C;1) ; (C;1)}

- J est le centre de gravité de ABC donc le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;1)}.
- G_1 est le barycentre de {(J;3) (C;1)} et donc de {(J ;2) (C ;2/3)} en multipliant les coefficients par 2/3. $\boxed{\text{2. est vraie}}$

 3. Pour tout point M, $\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$
$= 2\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{BM} + 2\vec{CM}$
$= \vec{BA} + 2\vec{CA} = -(\vec{AB} + 2\vec{AC})$ $\boxed{\text{3. est fausse}}$

 4. G_m est le barycentre de (A;1) (B;m) et (C;2m). Par définition, $\forall$ M $\in$ (P), $\vec{MA} + m\vec{MB} + 2m\vec{MC} = (1+m+2m)\,\vec{MG_m}$

En prenant M = A, on obtient : $m\vec{AB} + 2m\vec{AC} = (1+3m)\,\vec{AG_m}$ c'est à dire $(1+3m)\,\vec{AG_m} = m(\vec{AB} + 2\vec{AC})$.

Puisque $m \neq -1/3$, $\vec{AG_m} = \dfrac{m}{1+3m}(\vec{AB} + 2\vec{AC})$: on a alors $\vec{AG_{-1}} = ½\,(\vec{AB} + 2\vec{AC})$ et donc $\vec{AG_m} = \dfrac{m}{1+3m} \times 2\vec{AG_{-1}}$ $\boxed{\text{4. est vraie}}$

 5. D'après 4. $\vec{AG_{-1/2}} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$.
$\vec{AG_{-1/2}} = \vec{AB} + 2\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BG_{-1/2}} = \vec{AB} + 2\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{BG_{-1/2}} = 2\vec{AC}$ donc $\vec{BG_{-1/2}}$ // $\vec{AC}$
Comme (AC) $\perp$ (AB) c'est à dire (AC) $\perp$ (IB) on a $(BG_{-1/2}) \perp$ (IB) et $IBG_{-1/2}$ est rectangle en B. $\boxed{\text{5. est vraie}}$

 6. D'après 4. $\vec{AG_m} = \dfrac{2m}{1+3m}\vec{AG_{-1}}$.

Soit P sur (AG_{-1}), il existe un réel α tel que $\vec{AP} = \alpha\,\vec{AG_{-1}}$

$P = G_m \Leftrightarrow \vec{AG_m} = \vec{AP} \Leftrightarrow \dfrac{2m}{1+3m} = \alpha \Leftrightarrow 2m = \alpha + 3m\,\alpha \Leftrightarrow m(2 - 3\alpha) = \alpha \Leftrightarrow m = \alpha/(2 - 3\alpha)$ à condition que $\alpha \neq 2/3$

Le point P de (AG_{-1}) tel que $\vec{AP} = (2/3)\,\vec{AG_{-1}}$ n'est pas un point G_m. $\boxed{\text{6. est fausse}}$