Polynésie, Juin 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie, en années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$). Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait–il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle donc pour $t \in [0 ;+\infty[$, $p(X<t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ et donc $p(X\geq t) = e^{-\lambda t}$.

1. D'après les calculs précédents, $p(X \geq 10) = e^{-10\lambda}$.
Or $p(X \geq 10) = 0,286 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286 \Leftrightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \Leftrightarrow \lambda = \ln(0,286)/10 \approx 0,125$ donc une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

2. La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois (0.5 an) est donnée par
$p(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,125\times 0,5} \approx 0,061$.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans est donnée par $p(X > 10|X > 8) = p(X > 8+2|X > 8) = p(X > 2)$ car X est à durée de vie sans vieillissement, d'où
$p(X > 10|X > 8) = e^{-0,125\times 2} \approx 0,779$.

<u>Remarque</u> : en utilisant la formule de p(A|B), on retrouve le même résultat.
$p(X>10|X>8) = \dfrac{p(X>10 \cap X>8)}{p(X>8)} = \dfrac{p(X>10)}{p(X>8)} = e^{-0,125\times 10}/e^{-0,125\times 8} = e^{-0,125\times 2}$.

4. Un oscilloscope dure plus de 10 ans avec une probabilité de 0,286 et moins de 10 ans avec une probabilité de 0,714.
La durée de vie d'un oscilloscope est <u>indépendante</u> de celle des autres appareils et on commande 15 appareils.
On est donc en présence d'une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,286$.
Soit N le nombre d'oscilloscopes durant plus de 10 ans : la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est $p(N \geq 1) = 1 - p(N = 0)$
Ainsi $p(N \geq 1) = 1 - 0,714^{15} \approx 0,994$.

5. Combien faut–il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
On est dans la même situation qu'à la question 4. On a alors $p(N \geq 1) = 1 - 0,714^n$, n étant le nombre d'appareils à acheter.

$p(N \geq 1) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,714^n \geq 0,999$
$\Leftrightarrow 0,714^n \leq 0,001$
$\Leftrightarrow n \ln(0,714) \leq \ln(0,001)$ car la fonction ln est croissante
$\Leftrightarrow n \geq \ln(0,001)/\ln(0,714)$ car ln(0.714) est négatif
$\Leftrightarrow n \geq 20,5$

Il faut donc acheter au moins 21 oscilloscopes.