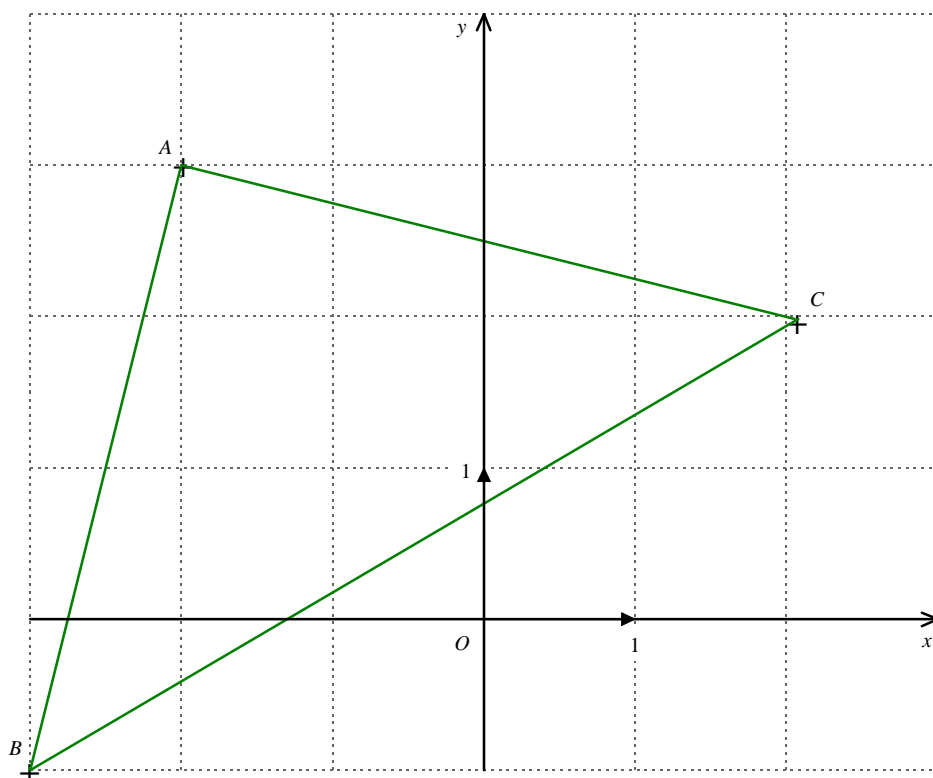


**Exercice 1** (4 points)

*Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans cet exercice,  
on donne dans un but pédagogique quelques explications.*

1. On commence par faire une figure pour émettre une conjecture puis on vérifie par le calcul.

Notons  $a = -2 + 3i$ ,  $b = -3 - i$  et  $c = 2,08 + 1,98i$  les affixes respectives de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .



D'après la figure, il semble bien que le triangle  $ABC$  ne soit pas isocèle (il aurait fallu que le point  $C$  ait pour affixe  $c = 2 + 2i$ ) et est peut-être rectangle en  $A$ .

Calcul des longueurs :

$$AB = |b - a| = |-1 - 4i| = \sqrt{17} \simeq 4,12 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$AC = |c - a| = |4,08 - 1,02i| = \sqrt{\left(\frac{204}{50}\right)^2 + \left(\frac{51}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{44217}}{50} = \frac{\sqrt{3^2 \times 17^3}}{50} = \frac{51\sqrt{17}}{50} \simeq 4,21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$BC = |c - b| = |5,08 - 2,98i| = \sqrt{\left(\frac{254}{50}\right)^2 + \left(\frac{149}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{86717}}{50} \simeq 5,89 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Il apparaît effectivement que le triangle  $ABC$  n'est isocèle en aucun sommet.

Contrôle de l'orthogonalité des droites  $(AB)$  et  $(AC)$  :

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{4,08 - 1,02i}{-1 - 4i} = \frac{(4,08 - 1,02i)(-1 + 4i)}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{-4,08 + 4,32i + 1,02i + 4,08}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{5,34i}{17}$$

Comme  $\frac{c - a}{b - a}$  est un imaginaire pur, on a :  $(AB) \perp (AC)$

Variante :  $BC^2 = \frac{86717}{2500}$  et  $AB^2 + AC^2 = 17 + \frac{2601 \times 17}{2500} = 17 + \frac{44217}{2500} = \frac{86717}{2500}$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

Conclusion :

**Réponse (b) : rectangle et non isocèle**

2. Notons  $A$  le point d'affixe  $a = 4i$  et  $B$  le point d'affixe  $b = -2$ . On a ainsi :

$$z' = \frac{z-a}{z-b}$$

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z'$  tel que  $z \neq -2$  et  $|z'| = 1$  est donc tel que :

$$z \neq -2 \text{ et } |z-a| = |z-b|$$

En interprétant géométriquement :  $M \neq B$  et  $AM = BM$

L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment  $[AB]$ .

**Réponse (b) : une droite**

Note : il n'y a pas lieu de priver la médiatrice d'un point. En effet, le point d'affixe  $-2$  n'est pas sur la médiatrice du segment  $[AB]$ .

3. Le nombre complexe  $z'$  est réel si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$z \neq b \text{ et } \frac{z-a}{z-b} = k$$

Ce qui se traduit géométriquement par :  $M \neq B$  et  $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{BM}$

Autrement dit :

$$M \in (AB) \setminus \{B\}$$

Variante :

$$z' \text{ est réel} \Leftrightarrow (z' = 0 \text{ ou } \arg(z') = 0 [\pi])$$

$$z' \text{ réel} \Leftrightarrow (z = a \text{ ou } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 [\pi])$$

$$z' \text{ réel} \Leftrightarrow (M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi])$$

$$z' \text{ réel} \Leftrightarrow (M = A \text{ ou } M \in (AB) \setminus \{A; B\})$$

$$z' \text{ réel} \Leftrightarrow (M \in (AB) \setminus \{B\})$$

Rappel : le nombre complexe nul n'a pas d'argument !

Rappel : un angle orienté n'a de sens que lorsque les vecteurs sont non nuls !

**Réponse (c) : une droite privée d'un point**

4. L'écriture complexe de la rotation de centre  $D(i)$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  est :

$$z' - i = e^{-\frac{i\pi}{3}} (z - i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z - i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Réponse (a)**

## **Exercice 2** (6 points)

1. La fonction  $f$  est de la forme :

$$f = uv$$

$$\text{où } \begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v(x) = x + 1 \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0 ; 2]$  (puisque affines), donc  $f$  l'est également et on a :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Comme  $f'$  est strictement positive sur  $[0 ; 2]$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; 2]$ .

Soit  $x \in [1 ; 2]$  :  $1 \leq x \leq 2$

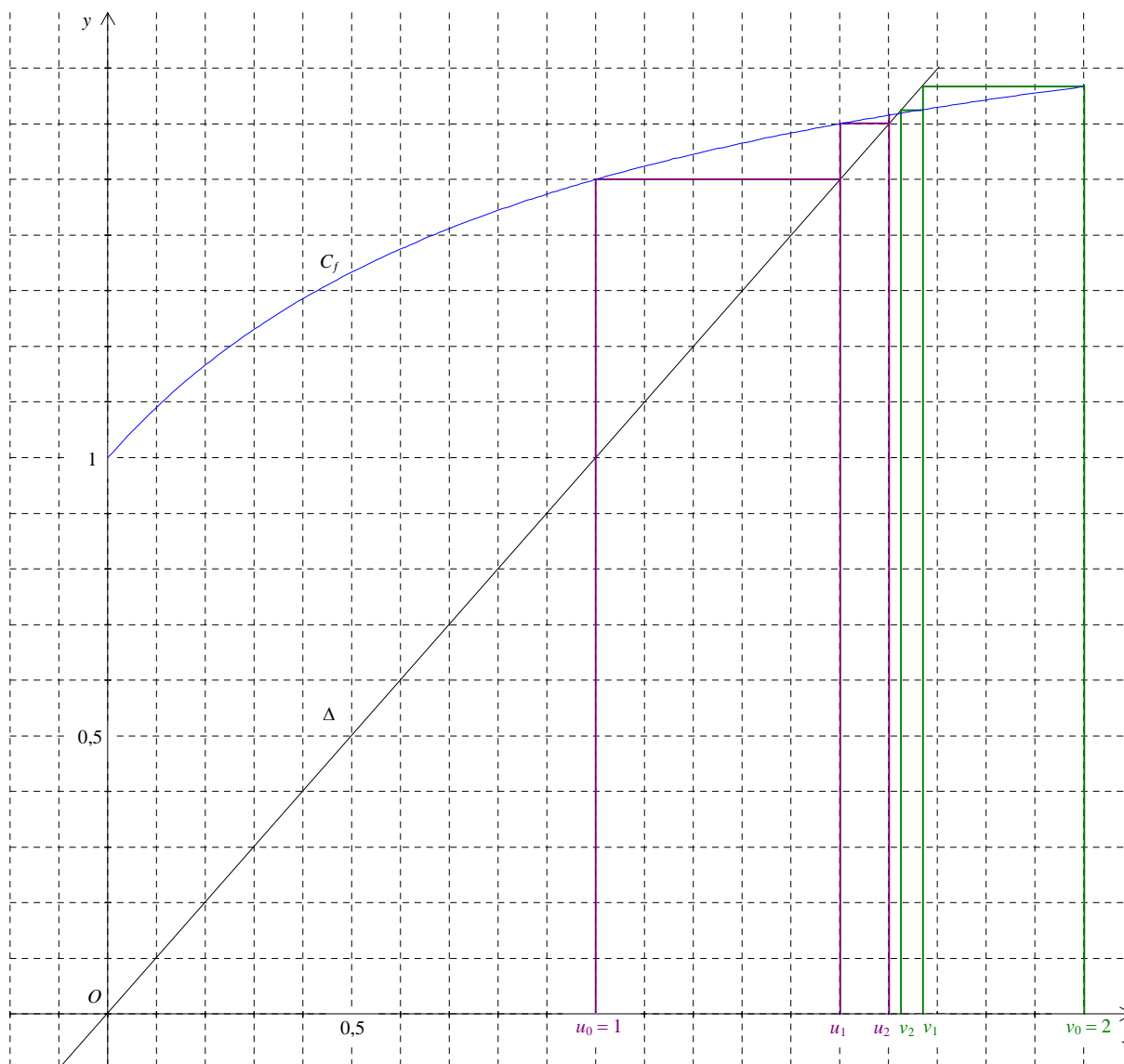
En appliquant la fonction  $f$  qui est croissante sur  $[1 ; 2]$  :

$$f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

Et comme  $f(1) = \frac{3}{2}$  et  $f(2) = \frac{5}{3}$  :  $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$

D'où :  $f(x) \in [1 ; 2]$

2. a. On construit sur le graphique les trois premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à l'aide de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  qui permet de ramener les termes de la suite sur l'axe des abscisses.



Le graphique permet de conjecturer que la suite  $(u_n)$  est croissante, que la suite  $(v_n)$  est décroissante et que les deux suites convergent vers un même réel compris entre 1,6 et 1,7.

b. On considère la propriété  $\wp$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\wp(n) : 1 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 2$$

- Comme  $v_0 = 2$  et  $v_1 = f(2) = \frac{5}{3}$ , on a  $\wp(0)$ . La propriété  $\wp$  est initialisée en 0.
- Supposons que, pour un certain entier naturel  $n$ , on ait  $\wp(n)$  :

$$1 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 2$$

Comme  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1 ; 2]$  :

$$f(1) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(2)$$

$$\frac{3}{2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{Et comme } 1 \leq \frac{3}{2} \text{ et } \frac{5}{3} \leq 2 : \quad 1 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 2$$

Ce qui est  $\wp(n+1)$ .

La propriété  $\wp$  est donc héréditaire à partir de  $n = 0$

Conclusion : la propriété  $\wp$  est initialisée en 0 et héréditaire à partir du rang 0. Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Pour tout entier naturel  $n$  :  $1 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 2$

On démontre de même que :  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

c. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2u_n v_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - 2u_n - v_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

On considère la propriété  $Q(n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$Q(n) : v_n - u_n \geq 0$$

- Comme  $v_0 - u_0 = 1$  et  $v_1 - u_1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{4}$ , on a  $Q(0)$ .
- Supposons que, pour un certain entier naturel  $n$ , on ait  $Q(n)$  :

$$v_n - u_n \geq 0$$

Comme  $(v_n + 1)(u_n + 1)$  est positif (d'après la question 2.b.), le signe de  $v_{n+1} - u_{n+1}$  est le même que celui de  $v_n - u_n$  qui est positif par hypothèse de récurrence donc :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$$

Ce qui est  $Q(n+1)$ .

On a donc, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n - u_n \geq 0$

Par ailleurs, toujours d'après la question 2.b. on a :

$$(v_n + 1)(u_n + 1) \geq 4$$

Et par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$$

Et en multipliant par  $v_n - u_n$  qui est positif d'après ce qui précède :

$$\frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{4} (v_n - u_n)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - u_n)$$

d. On considère la propriété  $R$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$R(n) : v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On a  $v_0 - u_0 = 1$  d'où  $R(0)$ .

Supposons que, pour un certain entier naturel  $n$ , on ait  $R(n)$  :

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Alors, d'après la question 2.c. :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Ce qui est  $R(n+1)$ .

On a donc, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e. D'après les questions 2.c. et 2.d. on a pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Or  $\frac{1}{4} \in ]-1 ; 1[$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

(Limite d'une suite géométrique de raison  $q \in ]-1 ; 1[$ )

Et d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Récapitulons :

$(u_n)$  est croissante

$(v_n)$  est décroissante

$(v_n - u_n)$  converge vers 0

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel  $\alpha$  (dans  $[1 ; 2]$ ).

On sait que :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$$

Et comme  $f$  est continue sur  $[1 ; 2]$ :

$$\alpha = f(\alpha)$$

$$\alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1}$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 2\alpha + 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

On calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{5}$  et on obtient :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Mais comme  $\alpha \in [1 ; 2]$  :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Cette limite est le nombre d'or.

### Exercice 3 (5 points)

1. a. On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-x}) = 2$$

Par ailleurs :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b. Pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ , on a :

$$f(x) - (2x - 2) = (x - 1)(2 - e^{-x}) - (2x - 2) = (1 - x) e^{-x} = e^{-x} - x e^{-x}$$

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc, par différence :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$$

Ce qui prouve que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote oblique à la courbe  $C$  en  $+\infty$ .

c. On a vu que :

$$f(x) - (2x - 2) = (1 - x) e^{-x}$$

On en déduit que :

- Sur  $[0 ; 1]$ , la courbe  $C$  est au-dessus de son asymptote  $\Delta$ .
- Sur  $[1, +\infty[$ , la courbe  $C$  est en dessous de son asymptote  $\Delta$ .

2. a. La fonction  $f$  est de la forme :

$$f = uv \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = 2 - e^{-x} \end{cases}$$

Les fonction  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0, +\infty[$  donc  $f$  l'est également et on a :

$$f' = u'v + uv'$$

Ce qui donne :

$$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (x - 1) e^{-x} = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$

b. Lorsque  $x > 0$ , on a  $-x < 0$  et par stricte croissance de l'exponentielle :

$$e^{-x} < e^0$$

D'où :

$$1 - e^{-x} > 0$$

Par ailleurs, comme  $x > 0$  :

$$x e^{-x} > 0$$


La somme de quantités strictement positives étant strictement positive, on a pour tout réel  $x > 0$  :

$$f'(x) > 0$$

c. On a  $f'(0) = 0$ . La fonction  $f$  est strictement croissante (sa dérivée ne s'annule qu'en un point isolé).

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
Signe de la dérivée $f'$	0	+
Variation de la fonction $f$	-1	$+\infty$



3. Sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ , la courbe  $C$  est en dessous de  $\Delta$ , l'aire en question est donc donnée par l'intégrale :

$$\int_1^3 [(2x - 2) - f(x)] dx = \int_1^3 (x - 1) e^{-x} dx$$

Posons :

$$u(x) = x - 1 \text{ et } v(x) = -e^{-x}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[1 ; 3]$  et de dérivées continues sur  $[1 ; 3]$  :

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = e^{-x}$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x} dx = \left[ (x-1)(-e^{-x}) \right]_1^3 + \int_1^3 e^{-x} dx = \left[ (x-1)(-e^{-x}) - e^{-x} \right]_1^3 = \left[ -xe^{-x} \right]_1^3 = -3e^{-3} + e^{-1} \text{ u.a.}$$

Or, une unité d'aire correspond à  $4 \text{ cm}^2$ . L'aire du domaine plan délimité par la courbe  $C$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$  est donc :

$$\frac{4}{e} - \frac{12}{e^3} \simeq 0,87 \text{ cm}^2 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

4. a. On cherche le point de la courbe  $C$  dont l'abscisse  $x$  est telle que :

$$f'(x) = 2$$

$$x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2$$

$$(x - 2) e^{-x} = 0$$

$$x = 2$$

On calcule l'image de 2 :

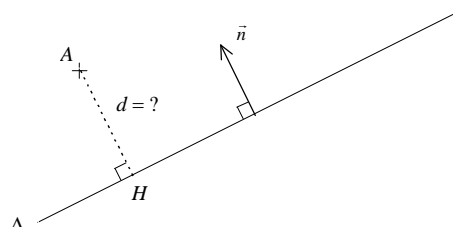
$$f(2) = 2 - e^{-2}$$

La courbe  $C$  a une tangente  $T$  parallèle à  $\Delta$  au point  $A(2 ; 2 - e^{-2})$ .

- b. Nous devons calculer la distance entre un point  $A(x_A ; y_A)$  et une droite  $\Delta$ . Plaçons-nous dans le cas général et procédons de la même manière que pour le calcul de la distance entre un point et un plan.

Notons  $ax + by + c = 0$  une équation de la droite  $\Delta$ . Un vecteur normal à  $\Delta$  est par exemple  $\vec{n}(a ; b)$ .

Notons  $H(x_H ; y_H)$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\Delta$ .



Comme les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont colinéaires, on a en calculant de deux façons  $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}|$  :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = |a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)| = \sqrt{a^2 + b^2} \times AH$$

Mais comme le point  $H$  est sur la droite  $\Delta$ , on a :

$$ax_H + by_H + c = 0$$

D'où :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ici, un vecteur directeur de la droite  $\Delta$  est  $\vec{u}(1 ; 2)$ . Un vecteur normal à  $\Delta$  est par exemple  $\vec{n}(2 ; -1)$ .

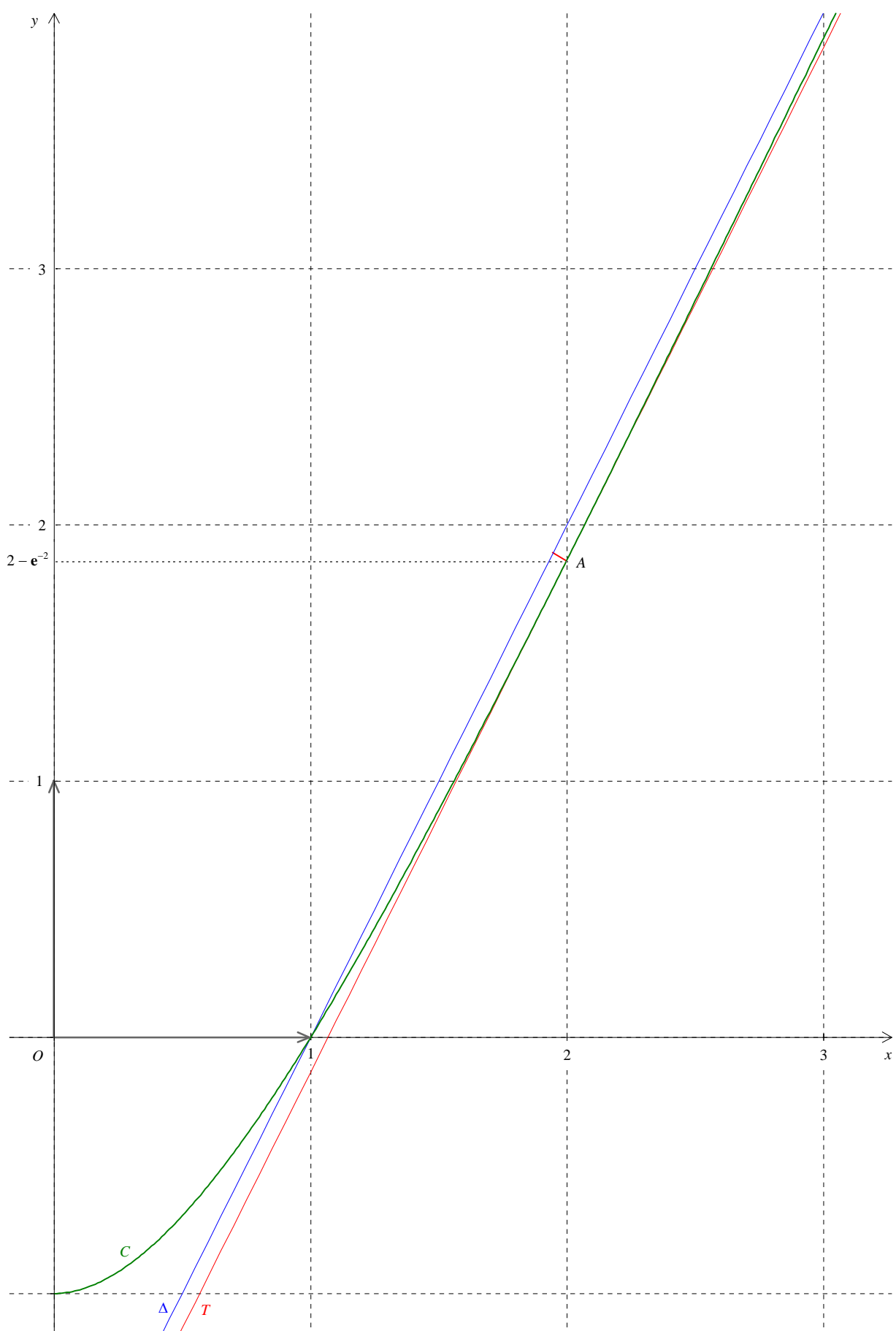
La distance entre le point  $A$  et la droite  $\Delta$  est alors :

$$d(A, \Delta) = \frac{|2x_A - y_A - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{e^2 \sqrt{5}} \text{ u.d. (unité de distance)}$$

Ce qui donne en cm :

$$\frac{2}{e^2 \sqrt{5}} \simeq 0,12 \text{ cm à } 10^{-2} \text{ près}$$

Représentation graphique : (unités non respectées)



**Exercice 4** (5 points)

## OBLIGATOIRE

1. a. Si le dé indique 1, le joueur gagne avec une probabilité de  $\frac{2}{5}$  (puisque'il y a 4 voyelles sur un total de 10

lettres) :

$$p_{D_1}(G) = \frac{2}{5}$$

Si le dé indique 2, le joueur tire simultanément deux lettres de l'urne. La probabilité que ces deux lettres

soient des voyelles est :

$$p_{D_2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Si le dé indique 3, le joueur tire simultanément trois lettres de l'urne. La probabilité que ces trois lettres

soient des voyelles est :

$$p_{D_3}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

- b. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition  $D_1 \cup D_2 \cup D_3$  :

$$p(G) = p_{D_1}(G)p(D_1) + p_{D_2}(G)p(D_2) + p_{D_3}(G)p(D_3)$$

$$p(G) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{180}$$

Le joueur a environ 13% de chance de gagner une partie.

2. Il s'agit de calculer :

$$p_G(D_1) = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{p_{D_1}(G)p(D_1)}{p(G)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{180}} = \frac{12}{23}$$

3. Considérons l'expérience  $\mathcal{E}$  qui consiste à jouer une partie. On note  $S$  l'événement "gagner la partie"

(succès). Notons  $p$  la probabilité d'un succès ; d'après la question 1.b.,  $p = \frac{23}{180}$ . On répète de manière

indépendante  $n = 6$  fois l'expérience  $\mathcal{E}$  et on note  $X$  le nombre de parties gagnées par le joueur. La variable aléatoire  $X$  représentant le nombre de succès obtenus suit donc une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

On a donc :

$$p(X=2) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = 15 \times \left(\frac{23}{180}\right)^2 \left(\frac{157}{180}\right)^4 \simeq 0,14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

4. On recherche la plus petite valeur du paramètre  $n$  tel que :

$$p(X \geq 1) \geq 0,9$$

En passant à l'événement contraire :

$$1 - p(X=0) \geq 0,9$$

$$p(X=0) \leq 0,1$$

$$\left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0,1$$

Par croissance du logarithme :

$$n \ln\left(\frac{157}{180}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

Et comme  $\ln\left(\frac{157}{180}\right) < 0$  (car  $\frac{157}{180} \in ]0 ; 1[$ ) :

$$n \geq -\frac{\ln 10}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)}$$

La calculatrice donne :  $-\frac{\ln 10}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \simeq 16,84$  à  $10^{-2}$  près

Et comme  $n$  est un entier :  $n \geq 17$

Conclusion : le joueur doit effectuer au minimum 17 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9.

#### Exercice 4 (5 points)

#### SPÉCIALITÉ

##### 1. a. Démonstration de cours.

Plaçons-nous dans le plan complexe et notons  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  les affixes respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

L'écriture complexe d'une similitude directe  $S$  est de la forme :

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

La similitude  $S$  transforme  $B$  en  $A$  et  $A$  en  $C$  si et seulement si :

$$\begin{cases} z_A = az_B + b & E_1 \\ z_C = az_A + b & E_2 \end{cases}$$

Ce système, d'inconnues  $a$  et  $b$ , admet une unique solution si et seulement si :

$$z_B \neq z_A$$

Or, les points  $A$  et  $B$  sont distincts donc  $z_A$  et  $z_B$  aussi.

Il existe donc bien une unique similitude  $S$  transformant  $B$  en  $A$  et  $A$  en  $C$ .

b. Le rapport de la similitude  $S$  est donné par :

$$\frac{AC}{BA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et son angle par :  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

2. Le centre  $\Omega$  de la similitude  $S$  est invariant par  $S$  :

$$S(\Omega) = \Omega$$

Par ailleurs :  $S(B) = A$

On en déduit que :  $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Omega$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$

On a  $C = S \circ S(B)$  donc :  $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\pi [2\pi]$

$\Omega$  appartient à la droite  $(BC)$

Ces deux dernières informations permettent de construire  $\Omega$ .

3. a. Puisque  $D = S \circ S(A)$ , on a :  $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\pi [2\pi]$

Donc les points  $A$ ,  $\Omega$  et  $D$  sont alignés.

Rappel : un système linéaire de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

admet un unique couple solution  $(x, y)$  si et seulement si :

$$ab' - a'b \neq 0$$

Puisque de plus  $C = S \circ S(B)$ , on a :  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = -\pi \ [2\pi]$

Donc les droites  $(CD)$  et  $(AB)$  sont parallèles.

b. Puisque  $[CD] = S([AC])$ , on a : 
$$\frac{CD}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

D'où : 
$$CD = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = 3+\sqrt{5}$$

4. a. Puisque le point  $E$  est le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(CD)$ , on a :

$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

Et comme les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles :

$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

Par ailleurs, comme  $S(B) = A$  et  $S(E) = F$  :

$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

Des deux égalités précédentes, on déduit :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = 0 \ [\pi]$$

Les points  $A$ ,  $B$  et  $F$  sont alignés.

Le point  $F$  est donc l'intersection de la perpendiculaire à  $(\Omega E)$  passant par  $\Omega$  et de la droite  $(AB)$ .

b. Comme  $(CD)$  et  $(AB)$  sont parallèles et que  $C$ ,  $E$  et  $D$  sont alignés, on a :

$$(ED) \parallel (BF)$$

Donc  $BFDE$  est un trapèze de bases  $(ED)$  et  $(BF)$

Comme  $F = S(E)$  et  $D = S(C)$ , on a :  $(EC) \perp (DF)$

C'est-à-dire :  $(ED) \perp (DF)$

Par ailleurs :  $(ED) \perp (BE)$

Un trapèze ayant une base perpendiculaire à ses deux côtés consécutifs est un rectangle donc  $BFDE$  est un rectangle.

Et enfin, puisque  $ABEC$  est un rectangle et que  $C$ ,  $E$  et  $D$  sont alignés dans cet ordre :

$$ED = CD - CE = 3 + \sqrt{5} - 2 = 1 + \sqrt{5} = AC = BE$$

Un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

Conclusion :  **$BFDE$  est un carré**

