Baccalauréat S Asie juin 2005

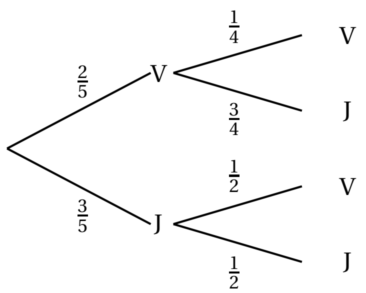
EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour $t = 1$, on obtient bien le triplet $(3\ ;\ 1\ ;\ -4)$: affirmation C
2. $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur évident, donc $-\overrightarrow{u}(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ en est aussi un : affirmation B.
3. $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff 1+2t+4-2t+9+3t = 0 \iff 14 = 3t \iff t = \dfrac{14}{3}$. Il existe donc un seul point commun : affirmation C.
4. Le triplet$(1\ ;\ 3\ ;\ 2)$ vérifie $x+2y-3z-1 = 0$: affirmation B.
5. Un vecteur normal à $\mathcal{Q}_\epsilon$ est le vecteur $\overrightarrow{v_2}(4\ ;\ -5\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}_2 = 0$: affirmation B.
6. On a $d(\mathrm{T},\ \mathcal{P}) = \dfrac{|-1-6-6-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$: affirmation A

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats



1.
   a. On a en suivant la branche supérieure $p(\mathrm{V}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.

   De même $p(\mathrm{J}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.

   b. En tournant la roue, la probabilité de gagner 20 € est $\dfrac{90}{360} = \dfrac{1}{4}$, celle de gagner 100 € est donc $\dfrac{1}{8}$; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est $\dfrac{5}{8}$.

   On a donc $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{V}) = \dfrac{5}{8}$.

   Or $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{V}) = \dfrac{p(\mathrm{V} \cap \mathrm{R})}{p(\mathrm{V}} \iff \dfrac{5}{8} = \dfrac{p(\mathrm{V} \cap \mathrm{R})}{\dfrac{1}{10}} \iff p(\mathrm{V} \cap \mathrm{R}) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{5}{80}$.

   c. On a $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{J}) + p(\mathrm{V} \cap \mathrm{R}) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{5}{80} = \dfrac{29}{80}$.

   d. $p(100) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{80}$; $p(20) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{40}$.
2.
   a. X peut prendre les valeurs : $-m$; $100-m$; $20-m$; 0.

   b.

x_i	$-m$	$100-m$	$20-m$	0
$p(X = x_i)$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{80}$	$\dfrac{1}{40}$	$\dfrac{29}{80}$

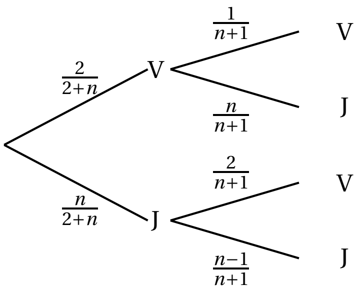
c. On a $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \times x_i = -\frac{6m}{10} + \frac{100-m}{80} + \frac{20-m}{40} + 0 = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur ne perdra pas d'argent si $\mathrm{E}(X) < 0 \iff \frac{140-51m}{80} < 0 \iff m > \frac{140}{51}$. Donc il faut que m soit au moins fixé à 3 euros.

3. On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \frac{4}{10}$ et $n = 4$.

La probabilité de ne pas perdre est égale à $\left(\frac{4}{10}\right)^4$, donc la probabilité de perdre au moins une fois est $1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0{,}025\ 6 = 0{,}974\ 4$.

4. On obtient un nouvel arbre de probabilités :



On doit avoir $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{2} \iff \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{2} \iff n^2 - 5n + 2 \geqslant 0$. Le trinôme $n^2 - 5n + 2$ a pour racines $n_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \approx 4{,}56$ et $n_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0{,}44$.

Il faut donc qu'il y ait plus de 4 boules jaunes.

EXERCICE 3 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

I.

1. On a$(\mathrm{i}^3 + (-8+\mathrm{i}) \times \mathrm{i}^2 + (17-8\mathrm{i}) \times \mathrm{i} = \mathrm{i} + 8 - \mathrm{i} - 17\mathrm{i} - 8 + 17\mathrm{i} = 0 \iff$ i estsolution de (E).

2. En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ a\mathrm{i} + b & = & -8+\mathrm{i} \\ b\mathrm{i} + c & = & 17 - 8\mathrm{i} \\ \mathrm{i}c & = & 17\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -8 \\ c & = & 17 \end{array}\right.$$

On a donc pour tout complexe z, $z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})(\left(z^2 - 8z + 17\right)$.

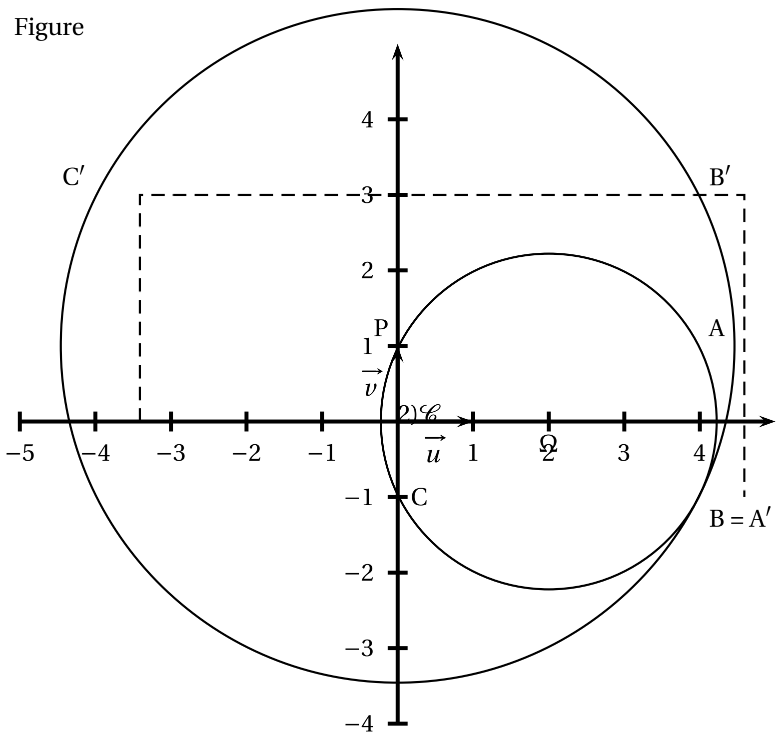
3. On a donc (E) $\iff (z+\mathrm{i})(\left(z^2 - 8z + 17\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z + \mathrm{i} & = & 0 \\ z^2 - 8z + 17 & = & 0 \end{array}\right.$.

On trouve aussitôt que :

$$\mathrm{S} = \{-\mathrm{i}\ ;\ 4+\mathrm{i}\ ;\ 4-\mathrm{i}\}$$

II.

1. Figure



2. L'écriture complexe de la rotation est : $z' - 2 = \mathrm{i}(z-2)$. Donc $z_{\mathrm{S}} - 2 = \mathrm{i}(4+\mathrm{i}-2) \iff z_{\mathrm{S}} = 2 + 2\mathrm{i} - 1 = 1 + 2\mathrm{i}$.

3. D'après la question précédente : $\Omega\mathrm{S} = \Omega\mathrm{A}$.
A et B sont symétriques autour de $(\mathrm{O}x)$, et $\Omega \in (\mathrm{O}x)$, donc $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{B}$; enfin B et C ayant la même ordonnée, Ω appartient à la médiatrice de [BC] et $\Omega\mathrm{B} = \Omega\mathrm{C}$.
Conclusion B, A, S et C appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω.
Le rayon est égal à $\Omega\mathrm{C} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

4. **a.** D'après la définition algébrique $z_{A'} = \dfrac{\mathrm{i}(4+\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{4 + \mathrm{i} - 2} = \dfrac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(9+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{20-5\mathrm{i}}{5} = 4 - \mathrm{i} = z_{\mathrm{B}}$.

$z_{B'} = \dfrac{\mathrm{i}(4-\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i} - 2} = \dfrac{11+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(11+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \dfrac{20+15\mathrm{i}}{5} = 4 + 3\mathrm{i}$.

$z_{C'} = \dfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{-\mathrm{i} - 2} = \dfrac{11-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}} = \dfrac{(11-2\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})} = \dfrac{-20+15\mathrm{i}}{5} = -4 + 3\mathrm{i} = z_{\mathrm{B}}$.

b. $z'_{\mathrm{A}'} = 4 - \mathrm{i}$, $z'_{\mathrm{B}'} = -4 + 3\mathrm{i}$, $z'_{\mathrm{C}'} = -4 + 3\mathrm{i}$.

c. $\mathrm{PA}' = |4 - \mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
$\mathrm{PB}' = |4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
$\mathrm{PC}' = |-4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
Donc A′, B′ et C′ appartiennent au cercle $\mathscr{S}'$ de centre P et de rayon $\sqrt{5}$.

d. On a $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-2) + 10}{z-2} = \mathrm{i} + \dfrac{10}{z-2} \iff z' - \mathrm{i} = \dfrac{10}{z-2}$ et en prenant les modules $\left|z' - \mathrm{i}\right| = \dfrac{10}{z - \mathrm{i}}$. Donc géométriquement $\mathrm{P}M' = \dfrac{10}{\mathrm{P}M}$.

e. Si $M \in \mathscr{C} \longrightarrow \Omega M = \sqrt{5}$. D'après la question précédente $\left|z' - \mathrm{i}\right| = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

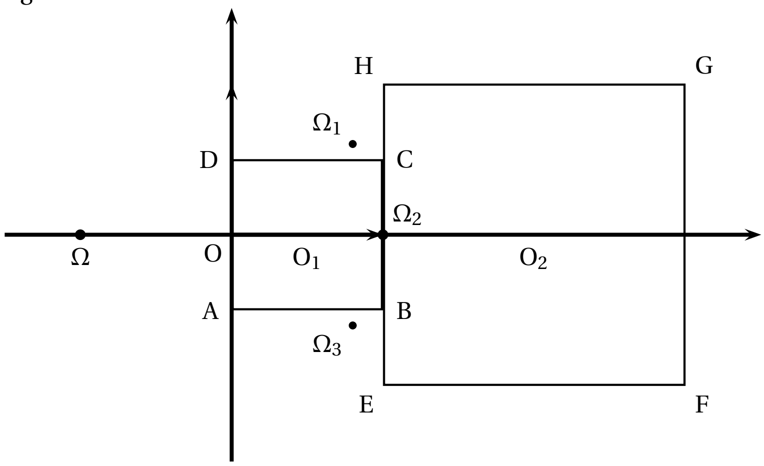
f. Géométriquement la dernière relation signifie : $\mathrm{P}M' = 2\sqrt{5} \iff$ les points M'appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$.
Remarque : $M \in \mathscr{C} \longrightarrow z = 2 + \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$. Après calcul on en déduit que $z' = \mathrm{i} + 2\sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$.
En prenant les modules on trouve bien que $|z' - \mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.

g. Conclusion : l'image du cercle $\mathscr{C}$ est donc **tout** le cercle $\mathscr{C}'$.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Figure.



2. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$ se traduit par $z'+1 = 2(z+1) \iff z' = 2z+1$.

$z'_{A'} = 2z_A + 1 = 2 \times \left(-\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 1 - i = z_E$.

$z'_{B'} = 2z_B + 1 = 2 \times \left(1-\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 3 - i = z_F$.

$z'_{C'} = 2z_C + 1 = 2 \times \left(1+\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 3 + i = z_G$.

$z'_{D'} = 2z_D + 1 = 2 \times \left(\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 1 + i = z_H$.

L'image de S_1 par h est donc S_2.

3. $g = h^{-1} \circ s$.

a. La similitude s transformant le carré de côté 1 en le carré de côté 2, le rapport de la similitude estégal à 2.

b. h^{-1} est l'homothétie de centre Ω de rapport $\dfrac{1}{2}$; la composée g est donc une similitude directe de rapport 1, donc une isométrie. S_1 a pour image par s S_2 qui lui-même a pour image par h^{-1}, S_1. Conclusion g laisse S_1 globalement invariante.

c. S_1 étant invariant, son centre l'est également : $g(O_1) = O_1$.

d. Les isométries du carré sont :
- l'identité ;
- la rotation r_1 de centre O_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$;
- la rotation r_2 de centre O_1 d'angle π $[2\pi]$ (symétrie autour de O_1) ;
- la rotation r_3 de centre O_1 d'angle $-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

e. On a $s = h \circ g$. Il y a donc quatre similitudes qui transforment S_1 en S_2 :
- l'homothétie h ;
- la composée de h avec r_1 ;
- la composée de h avec r_2 ;
- la composée de h avec r_3 ;

4. Écritures complexes de ces isométries :

a. – $h \circ r_1$:

L'écriture complexe de r_1 est $z' - \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - \dfrac{1}{2}\right) \iff z' = iz - \dfrac{i}{2} + \dfrac{1}{2}$;

celle de $h \circ r_1$ est donc : $z' = 2iz - i + 2$.

– $h \circ r_2$:
L'écriture complexe de r_2 est $z' - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\left(z - \frac{1}{2}\right) \iff z' = -z+1$; celle de $h \circ r_2$ est donc $z' = -2z+3$;
– $h \circ r_3$:
L'écriture complexe de r_3 est $z' - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - \frac{1}{2}\right) \iff z' = -\mathrm{i}z + \frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{1}{2}$; celle de $h \circ r_3$ est donc $z' = -2\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 2$.

b. Les centres de ces similitudes sont les points invariants :

– Centre Ω_1 de $h \circ r_1$. Son affixe ω_1 est solution de $z = 2\mathrm{i}z - \mathrm{i} + 2 \iff z = \omega_1 = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}$.
– Centre Ω_2 de $h \circ r_2$. Son affixe ω_2 est solution de $z = -2z+3 \iff z = \omega_2 = 1$.
– Centre Ω_3 de $h \circ r_3$. Son affixe ω_3 est solution de $z = -2\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 2 \iff z = \omega_3 = \frac{4-3\mathrm{i}}{5}$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

1. Si $n = 1$, $\mathrm{I}_1 = \int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. On intègre par parties :
$\begin{array}{ll} u(x) = 2-x & v'(x) = \mathrm{e}^x \\ u'(x) = -1 & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}$. Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, donc :
$\mathrm{I}_1 = [(2-x)\mathrm{e}^x]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = -2 + [\mathrm{e}^x]_0^2 = -2 + \mathrm{e}^2 - 1 = \mathbf{e^2 - 3}$.

2. On a les équivalences $0 \leqslant x \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 2-x \leqslant 2 \iff 0 \leqslant (2-x)^n \leqslant 2^n \iff 0 \leqslant (2-x)^n\mathrm{e}^n \leqslant 2^n\mathrm{e}^n \iff 0 \leqslant \frac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^n \leqslant \frac{1}{n!}2^n\mathrm{e}^n$.
On en déduit l'ordre des intégrales suivantes :
$\int_0^2 0 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{1}{n!}2^n\mathrm{e}^n \, \mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!} \times 2^n \left[\mathrm{e}^x\right]_0^2 \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)}{n!}$.

3. On a $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.
Intégrons par parties en posant :
$\begin{array}{ll} u(x) = (2-x)^{n+1} & v'(x) = \mathrm{e}^x \\ u'(x) = -(n+1)(2-x)^n & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, donc :
$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[(2-x)^{n+1}\mathrm{e}^x\right]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x\right) = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$.

4. Démontrons la relation par récurrence :
• Initialisation : $\mathrm{e}^2 - 1 = 2 + \mathrm{I}_1 \iff \mathrm{I}_1 = \mathrm{e}^2 - 3$: vrai ;
Hérédité : supposons que $\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$. D'après la question précédente, on peut écrire : $\mathrm{e}^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ qui est bien la relation demandée au rang $n+1$. L'égalité est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

5. **a.** Quel que soit le naturel n, $u_n > 0$. Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$.

Or $n \geqslant 3 \iff n+1 \geqslant 4 \iff \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{2}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : si $n \geqslant 3$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.

b. En écrivant toutes les inégalités précédentes de 3 à n et en multipliant membres à membres (tous les termes sont supérieurs à zéro) on obtient :

$$0 \leqslant u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

c. On a $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$. Donc d'après l'encadrement trouvé à la question b. on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$; donc d'après l'encadrement démontré à la question 2. on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

d. En reprenant l'égalité obtenue à la question 4. et par limite on obtient que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$