Corrigé BAC S 2005 – Nouvelle calédonie

Exo 01

Q1. pour tout entier naturel n non nul, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :

$e^{in\theta}$: **VRAI** c'est une règle classique sur les exponentielles réelles encore vrai dans $\mathbb{C}$

$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$: **FAUX**

$\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)$: **VRAI.** En effet, par définition de l'exponentielle complexe, $e^{i\theta'}=\cos\left(\theta'\right)+i\sin\left(\theta'\right)$ et on applique cette définition à $\theta'=n\theta$.

Q2. La partie imaginaire de z vaut :

Travail préliminaire : Il suffit d'écrire z = x+iy et de vérifier à la main...

$\frac{z+\overline{z}}{2}$: **FAUX**

$\frac{z-\overline{z}}{2i}$: **VRAI**

$\frac{z-\overline{z}}{2}$: **FAUX**

Q3. soit z = x+iy. On suppose que z est un imaginaire pur. Alors $|z|^2$ est égal à :

Travail préliminaire : Comme c'est un imaginaire pur, x=0 donc z = iy. Or |i|=1 donc |z| = |y|. Donc $|z|^2$ est égal à

y² : **VRAI**.

-y² : **FAUX.**

-z² : **VRAI.** z² = (iy)² = i²y² = -y² donc –z² = y² = |z|² d'après le a.

Q4. A(a), B(b) et C(c) avec $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$. Alors :

Travail préliminaire : en passant à l'argument et au module, on obtient directement $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ et AB²=3AC².

Donc déjà le **2. est FAUX.**

Pour le 1... BC = AC ?? On connaît AB, AC mais pas BC !! Mais d'après l'égalité sur les angles ci-dessus, ABC est rectangle en A donc [Pythagore], BC² = AB² + AC² = 3AC² + AC² = 4AC² donc BC= 2AC. **VRAI**

Pour le 3 : on n'a que du CA à droite donc on pense à introduire le vecteur $\overrightarrow{CA}$ à gauche :

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}+\underbrace{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}}_{0\ car\ ABC\ rect\ en\ A}=CA.CA.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}\right)=CA^2$: **VRAI**

Exo 02

Synthèse de l'énoncé :	40 trajets	Fraude toujours
	Contrôles indépendants	p('être contrôlé') = p
	Trajet : 10€	Amende : 100€

On note X_i la v.a. qui vaut 1 si Claude est contrôlé au ième trajet et 0 sinon.

On pose $X=X_1+X_2+...+X_n$.

1. Regardons X de plus près : X compte en fait le nombre de fois où Claude est contrôlé. En effet, si X=k, cela signifie que il y a k v.a. X_i qui valent 1 et les autres 0.

Cela fait alors penser à une loi binomiale.

Durant chaque trajet, il y a deux issues possible : S = « être contrôlé » et $\overline{S}$. Nous sommes donc en présence d'une épreuve de Bernoulli, avec p(S) = p.

Nous répétons alors 40 fois, de manière indépendante [contrôles indépendants par hypothèse], cette épreuve de Bernoulli. Cela représente un schéma de Bernoulli.
Comme X compte le nombre de contrôles (succès) parmi ces 40 trajets, X suit une loi binomiale de paramètres 40 et p.

La loi de X est donc $p(X=k)=\binom{40}{k}p^k(1-p)^{40-k}$ où k est un entier de 0 à 40.

2. Posons $p=\frac{1}{20},\ donc\ 1-p=\frac{19}{20}$.

a. D'après le cours $E(X)=np=40\times\frac{1}{20}=2$: sous ces conditions, on peut s'attendre à ce que Claude soit contrôlé 2 fois.

b. $p(X=0)=\binom{40}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(\frac{19}{20}\right)^{40-0}=\left(\frac{19}{20}\right)^{40}$, $p(X=1)=\binom{40}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1\left(\frac{19}{20}\right)^{40-1}=40\times\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{39}$ et $p(X=2)=\binom{40}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{38}=780\times\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{38}$.

c. On cherche $p(X\le 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\left(\frac{19}{20}\right)^{40}+40\times\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{39}+780\times\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{38}$ donc $p(X\le 2)=0,6767=67,67\%$ à 10^{-4} près.

3. Soit Z_i la v.a. qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Le trajet coûte 10€, soit un investissement de 400€ pour 40 trajets. Une amende est pénalisé de 100€ donc X amendes (X compte le nombre de contrôles) sont pénalisées de 100X €.
Ainsi, Z = 400 – 100X.
Utilisons la formule **E (aX+b) = aE(X) + b** : $E(Z)=E(400-100X)=400-100\underbrace{E(X)}_{40\times\frac{1}{5}}=-200$.

Sous ces conditions, Claude perdra en moyenne 200€.

4. On cherche désormais p tel que $p(X\ge 3)\ge 99\%$.

a. $p(X\le 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=(1-p)^{40}+40\times p(1-p)^{39}+780\times p^2(1-p)^{38}$. Le résultat recherché nous suggère de factoriser par $(1-p)^{38}$:
$p(X\le 2)=(1-p)^{38}\left((1-p)^2+40p(1-p)+780p^2\right)=...=(1-p)^{38}\left(741p^2+38p+1\right)$.

b. Posons $f(x)=(1-x)^{38}\left(741x^2+38x+1\right)$:

$$\begin{aligned} f'(x)&=-38(1-x)^{37}\left(741x^2+38x+1\right)+(1-x)^{38}(1482x+38)\\ &=(1-x)^{37}\left(-38\left(741x^2+38x+1\right)+1482x+38\right)\\ &=(1-x)^{37}\left(-28158x^2+38x\right)=38x(1-x)^{37}(x-741)\end{aligned}$$

→ f est dérivable et on a l'expression ci-dessus. Mais sur [0,1], x et 1-x sont positifs par contre x-741 est négatif.
→ Donc f est décroissante sur [0,1] : elle est d'ailleurs décroissante de $f(0)=1$ à $f(1)=0$.
Cette fonction f est continue sur I, strictement monotone sur I et $0,01\in[f(1);f(0)]$. D'après le théorème des valaues intermédiaires, 0,01 admet donc un unique antécédent par f sur I. On le note x_o.
→ Rechercher n tel que $\frac{n}{100}<x_o<\frac{n+1}{100}$ revient à rechercher la partie entière de 100 x_o (car $\frac{n}{100}<x_o<\frac{n+1}{100}\Leftrightarrow n<100x_o<n+1$). La calculatrice donne $0,19<x_o<0,20\Leftrightarrow\frac{19}{100}<x_o<\frac{19+1}{100}$ donc n = 19.

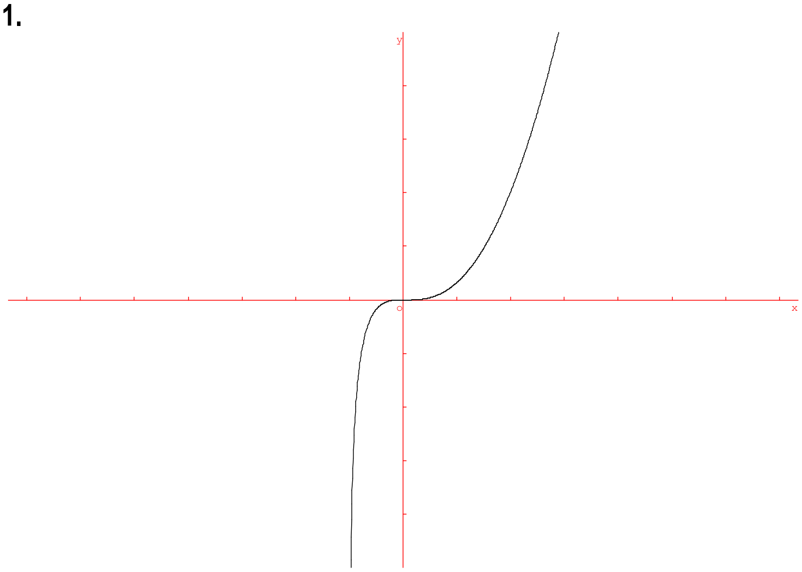
c. On cherche p tel que $p(X\ge 3)\ge 99\%$.

Mais $p(X\ge 3)\ge 99\%\Leftrightarrow 1-p(X\le 2)\ge 0,99\Leftrightarrow p(X\le 2)\le 0,01\Leftrightarrow f(p)\le 0,01\Leftrightarrow f(p)\le f(x_o)$. Comme f est (strictement) décroissante, cela équivaut à $p\ge x_o$. La valeur minimale de p est donc x_o lui-même (on pourra choisir p>0,2).

Exo 03

Soit f définie sur I = $]-1;+\infty[$ par $f(x)=x^2-2,2x+2,2\ln(x+1)$.

1.



2. **a.** On peut conjecturer que la fonction est croissante sur I.
b. Il semble aussi que l'équation f(x) = 0 admette une unique solution (x=0).

3. **a.** f est dérivable sur I et nous avons $f'(x)=\dfrac{2,2}{x+1}+2x-2,2=...=\dfrac{x(2x-0,2)}{x+1}$. Sur I, x+1>0 donc f' a le signe de x (2x – 0,2) : c'est un trinôme de racines 0 et 0,1, avec a>0, donc f' est négatif entre les racines 0 et 0,1 et positif à l'extérieur cad sur $]-1;0]\cup]0,1;+\infty[$.
On en déduit que f est croissante sur $]-1;0]$ et sur $]0,1;+\infty[$ **(ET PAS SUR L'UNION)** et décroissante sur [0 ; 0,1].

b. $\rightarrow$ Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(X)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$: f tend donc vers $-\infty$ en -1.

$\rightarrow$ En $+\infty$, le polynôme est $x\rightarrow x^2-2,2x$ est de même limite que son monôme de plus haut degré x² : il tend donc vers $+\infty$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$: f tend donc vers $+\infty$ en $+\infty$.

$\rightarrow$ On en déduit le tableau de variations suivant :

	-1	0	0,1	$+\infty$
F	$-\infty$ ↗	0 ↘	$-3,2\times10^{-4}$ ↗	$+\infty$

c. $\rightarrow$ Sur l'intervalle [-1 ;0,1], f est majorée par 0 et ne l'atteint qu'une fois, en x = 0.
$\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0,1;+\infty]$, f est continue, strictement croissante et passe d'une valeur négative (f(0.1)) à une valeur positive, puisqu'elle tend vers $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 admet donc un unique antécédent sur $[0,1;+\infty]$.
$\rightarrow$ Finalement, f s'annule deux fois sur I.

d. Non, nos deux conjectures se sont avérées fausses.

4. **a.** On vérifie que f(0.2) = 0,002 (au millième par excès, pour pouvoir lire l'image !) et f(0.1) = 0,0032 (au dimillième par défaut, pour pouvoir lire l'image !) : ce sont les valeurs proposées.
b. L'arrondi par défaut au centième de α est 0,15.

5. Posons $F(x)=\frac{1}{3}x^3-1,1x^2-2,2x+2,2(x+1)\ln(x+1)$ définie sur I.

a. F est dérivable sur I et $F'(x)=..=f(x)$ donc F est une primitive de f sur I.

b. Posons $I=\int_0^{\alpha} f(x)dx$: entre 0 et α la fonction f est négative (voir tableau de variations) : I est donc l'opposé de l'aire du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses : $D:\begin{cases} 0\le x\le \alpha \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$.

c. $I=\int_0^{\alpha} f(x)dx=[F(x)]_0^{\alpha}=F(\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$. Vu la question, il faut changer l'écriture de ce dernier terme.

Puisque par définition $f(\alpha)=0$, on a $2,2\ln(\alpha+1)=-\alpha^2+2,2\alpha$ donc

$I=F(\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+(\alpha+1)(-\alpha^2+2,2\alpha)=-\frac{2\alpha^3}{3}+0,1\alpha^2$.

Exo 04

Plus impressionnante que vraiment difficile !!

PARTIE A.

A_o, B_o deux points distincts.

On note A_1 le milieu de $[A_oB_o]$ et B_1 le barycentre de $\{(A_o,1);(B_o,2)\}$.

Pour tout entier naturel n, on note A_{n+1} le milieu de $[A_nB_n]$ et B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$.

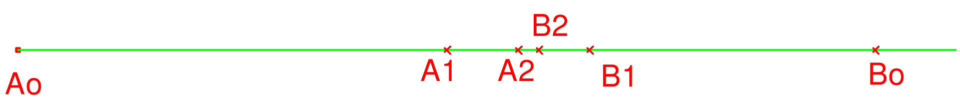
1. $[A_oB_o]$ mesure 12cm.

Pour placer B_1, on utilise la définition de barycentre : B_1 est le seul point qui vérifie

$1\overrightarrow{B_1A_o}+2\overrightarrow{B_1B_o}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{B_1B_o}=-\overrightarrow{B_0A_o}=\overrightarrow{A_oB_o}$ et donc $\overrightarrow{B_1B_o}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_oB_o}$ et ce segment mesure donc 4cm...

REMARQUE : on aurait pu l'anticiper : imaginons qu'on place 1kg en A_o et 2kg en B_o : pour pouvoir maintenir la tige $[A_oB_o]$ en équilibre, il faut placer son doigt au $\frac{2}{3}$ du segment $[A_oB_o]$, le plus près du poids le plus lourd, B_o.

A la deuxième étape, on a A_2 milieu de $[A_1B_1]$ et B_2 tel que $\overrightarrow{B_2B_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B_1}$.



Il semblerait que pour n très grand, ces points soient infiniment proches cad que $A_nB_n\to 0$

2. Notons u_o l'abscisse de A_o, cad $u_o=0$ et v_o l'abscisse de B_o, cad $v_o=12$.

Soit P(n) la proposition « A_{n+1} est d'abscisse u_{n+1} et B_{n+1} est d'abscisse v_{n+1} avec $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}$ ».

a. - A_1 est le milieu de [AoBo] donc son abscisse est $u_1=6=\frac{1}{2}(u_o+v_o)$

- De même, d'après les propriétés sur le barycentre $v_1=\frac{u_0+2u_1}{1+2}=\frac{u_0+2u_1}{3}=4$

P(0) est donc vraie

b. On suppose P(n) vraie : la propriété « G bary de (A,a)(B,b) implique que $x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}$ » fournit encore le résultat...

PARTIE B.

Posons $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ avec $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 12 \end{cases}$.

1. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{-u_n + v_n}{6} = \frac{1}{6}(v_n - u_n) = \frac{1}{6}w_n$: c'est donc une suite géométrique de raison 1/6.
Comme sa raison q vérifie -1<q<1, cette suite converge vers 0.
Vu que $w_0 = v_0 - u_0 = 12$, on obtient $w_n = 12\left(\frac{1}{6}\right)^n > 0$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$ donc cette suite croit.
$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{-v_n + u_n}{3} = -\frac{w_n}{3} < 0$ donc elle décroit.

3. Nous sommes en présence d'une suite croissante, d'une suite décroissante, telle que la différence des deux tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes.
Ces deux suites sont donc convergentes et convergent vers la même limite L.

4. Posons $t_n = 2u_n + 3v_n$: alors $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = (u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 2u_n + 3v_n = t_n$: chaque terme est égal au précédent donc la suite est constante.

PARTIE C.

Nous savons que $u_n \; et \; v_n$ convergent vers L.
Par conséquent, $t_n = 2u_n + 3v_n$ converge vers 2L+3L = 5L : mais cette suite est constante, donc égale à son premier terme $t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$.
Il s'en suit que 5L = 36 cad L = $\frac{36}{5} = 7,2$.
La position limite de An et Bn se situe donc à 7,2 cm de Ao, dans le segment [AoBo].