1. Exercice 1

1. *A*, *B* et *C* sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, *et* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$: les coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, d'où le résultat.

2. a. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux sécantes du plan.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$. Comme $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$, la droite (d) est orthogonale à (AB) et (AC) donc au plan (*ABC*).

b. Comme (d) est orthogonale à(ABC), un vecteur directeur de (d) est un vecteur normal de (ABC).

Comme $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ dirige (d), (ABC) admet une équation du type 2x – 3y + z + d = 0.

Pour trouver la constante d, on remplace dans cette équation les coordonnées d'un point du plan, par exemple A. On trouve d = - 4 donc $(ABC): 2x-3y+z-4=0$.

3. a.

- Déterminons les coordonnées de H : H étant commun au plan et à la droite, ses coordonnées x, y, z vérifient les 4 équations. On remplace donc *x*, *y*, *z* dans l'équation de (*ABC*) par : $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$, soit $2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0 \Leftrightarrow t=1$.

  On trouve ainsi $\begin{cases}x=-7+2=-5\\y=-3\\z=4+1=5\end{cases}$.

- Le barycentre de {(*A* ; −2), (*B* ; −1), (*C* ; 2)} a pour coordonnées : $\begin{cases}x=\frac{1}{-1}(-2.2-1.(-3)+2.3)=-5\\y=\frac{1}{-1}(-2.1-1.(-1)+2.2)=-3\\z=\frac{1}{-1}(-2.3-1.7+2.4)=5\end{cases}$.

On retombe bien sur les coordonnées de *H*.

b. Comme H est le barycentre de {(*A* ; −2), (*B* ; −1), (*C* ; 2)}, pour tout point M : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$.

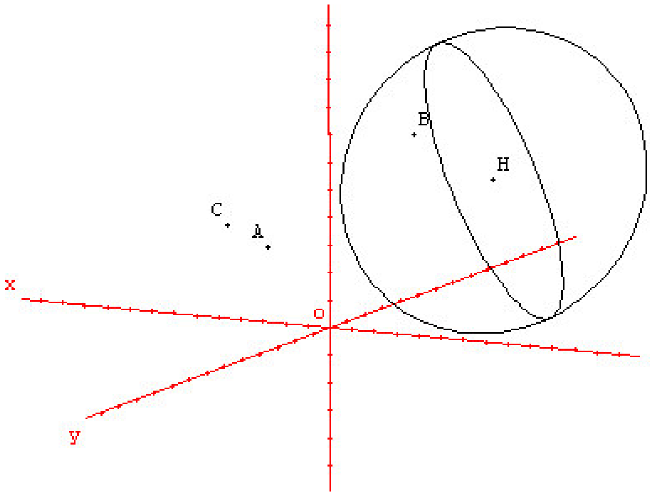
De plus, d'après Chasles : $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$. Ainsi $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$.

Γ_1 est donc le **plan** passant par *H* et orthogonal à (*CB*).

c. De même, $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29} \Leftrightarrow MH=\sqrt{29}$: Γ_2 est la **sphère** de centre *H*, de rayon $\sqrt{29}$.

d. Comme Γ_1 contient *H*, l'intersection de Γ_1 et Γ_2 est le **cercle** de centre *H*, de rayon $\sqrt{29}$.

e. Calculons la distance *SH* : $\sqrt{(-8+5)^2+(1+3)^2+(5-3)^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$: oui, $S\in\Gamma_1\cap\Gamma_2$.



2. *Exercice 2 (non spécialistes)*

1. a. L'homothétie h a pour écriture complexe : $h_{(A,\,2)} : z' - z_A = \sqrt{2}\,(z - z_A) \Leftrightarrow z' - i = \sqrt{2}\,(z - i)\,z$.

Comme B(2), on a $z_{B_1} = \sqrt{2}\,(2 - i) + i$.

b. La rotation r a pour écriture complexe :

$r_{(A,\,\pi/4)} : z' \to z''$ *tel que* $z'' - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}\,(z' - z_A) \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{4}}\,(z' - i) + i$. Par conséquent

$z_{B'} - i = e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}\,(2 - i) + i - i\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow z_{B'} = 3 + 2i$.

2. Soit f qui à M(z) associe $M'(z')$ tel que $z' = (1 + i)\,z + 1$.

a. L'affixe de $f(B)$ est $z' = (1 + i)\,2 + 1 = 3 + 2i = z_{B'}$ donc $f(B) = B'$.

b. Le point M(z) est invariant par f ssi f(M) = M ssi z' = z.
Or $z = (1 + i)\,z + 1 \Leftrightarrow iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i$ donc A est le seul point invariant par f.

c. On a $\dfrac{z' - z}{i - z} = \dfrac{z + iz + 1 - z}{i - z} = \dfrac{i\,(z - i)}{i - z} = -i$. Par conséquent,

- En passant au module : $\dfrac{MM'}{MA} = |-i| = 1 \Leftrightarrow MM' = MA$.
- En passant à l'argument : $\arg\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

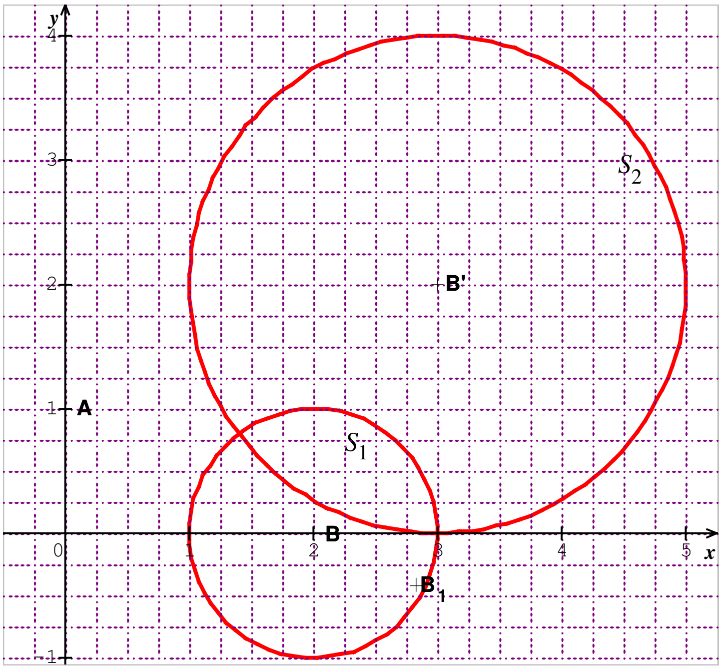
Le triangle AMM' est donc isocèle rectangle en M, orienté dans le sens indirect : cela donne au passage le procédé de construction de M' à partir d'un point M quelconque.

3. a. On a $|z - 2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow MB = \sqrt{2}$: cela caractérise le cercle de centre B, de rayon $\sqrt{2}$.

b. On vérifie par le calcul que $z' - 3 - 2i = (1 + i)\,z + 1 - 3 - 2i = (1 + i)\,z - 2 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.

Par conséquent, lorsque $|z - 2| = \sqrt{2}$, on a $|z' - z_{B'}| = |1 + i|\,|z - 2| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ donc M' appartient au cercle de centre B', de rayon 2.

c. Voir la figure ci-dessous.



3. *Exercice 2 (spécialistes)*

Soit *A* d'affixe 3*i* et *B* d'affixe 6.

Partie A

1. On peut utiliser le résultat du cours sur l'existence d'une telle similitude ou le redémontrer. L'écriture d'une similitude directe est de la forme z' = az + b, où a et b sont à déterminer.

Comme s(A) = O et s(O) = B, on a $\begin{cases} 0 = a\times 3i + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 2i \end{cases} \Rightarrow z' = 2iz + 6$.

L'angle de s est arg(a) : $\frac{\pi}{2}$; son rapport est |a| : 2 ; son centre est l'unique point fixe de s : il est d'affixe

$\omega = 2i\omega + 6 \Leftrightarrow \omega(1-2i) = 6 \Leftrightarrow \omega = \frac{6}{5}(1+2i)$.

2. De même, l'écriture d'une similitude indirecte est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ On résout donc le système :
$\begin{cases} 0 = a\times\overline{3i} + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a\times -3i + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = -2i \end{cases} \Rightarrow z' = -2i\,\overline{z} + 6$.

Partie B

1. Soit f d'écriture complexe $z' = -2i\,\overline{z} + 6$.

Pour déterminer le point invariant de f, on utilise l'écriture algébrique d'un complexe : on se rend compte en effet que l'équation $z = -2i\,\overline{z} + 6$ ne se résout pas de la manière habituelle.

On a $z' = -2i\,\overline{z} + 6 \Leftrightarrow x' + iy' = -2i(x - iy) + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y + 6 \\ y' = -2x \end{cases}$.

Par conséquent, le(s) point(s) invariant(s) vérifient $\begin{cases} x = -2y + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$: il y a donc un unique point fixe *K,* qui a pour affixe −2 + 4*i*.

2. a. *f* et *h* sont deux similitudes : leur composée *g* est donc une similitude (indirecte) de rapport les produits des rapports de *h* et *f*, cad $\frac{1}{2}\times 2 = 1$. *g* est donc une isométrie.

K est fixe par *g* car *h* et *g* fixent K : g(K) = f(h(K)) = f(K) = K.

b. On a $h : z \to z' = \frac{1}{2}z - 1 + 2i$ donc $g = f \circ h : z \to z' \to z'' = -2i\overline{z'} + 6 = -2i\left(\frac{1}{2}\overline{z} - 1 - 2i\right) + 6 = -i\overline{z} + 2i + 2$.

Remarque : Il s'agit bien d'une isométrie car le module du coefficient de $\overline{z}$ est 1.
On vérifie par le calcul que K est bien un point fixe.

c. Un point est sur l'axe $(O ; \vec{v})$ ssi son abscisse est nulle ssi $\overline{z} = -z$. Soit L un tel point.

L est fixe par g ssi g(L) =L ssi $z = -i\,\overline{z} + 2i + 2 \overset{\overline{z}=-z}{\Leftrightarrow} z = i\,z + 2i + 2 \Leftrightarrow z = \frac{2i+2}{1-i} = 2i$. L(2i) est donc le seul point invariant de g de l'axe $(O ; \vec{v})$.

Conclusion : comme g est une similitude indirecte qui admet K et L comme points fixes, g est la réflexion d'axe (KL).

d. On a $g = f \circ h \Rightarrow g \circ h^{-1} = f \Rightarrow f = g \circ h^{-1}$ donc $h' = h^{-1}$ est l'homothétie de centre K, de rapport 2.

3. Comme h^{-1} transforme une droite en une droite parallèle (comme toute homothétie), il faut et suffit que Δ soit parallèle à (KL) pour que son image le soit également.

4. Exercice 3

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x + 1)$.

1. a. f est dérivable et on a $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

Sur $[0 ; +\infty[$, $x+1 \geq 1 \Rightarrow \ln(1+x) \geq 0$ et $\frac{x}{1+x} \geq 0$ donc f est croissante sur cet intervalle.

b. La tangente à la courbe en O a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0$: oui, l'axe des abscisses est tangent à (C) au point O.

2. a. Pour tout $x \neq -1$, $ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + c}{x+1} = \frac{x^2(a) + x(a+b) + b + c}{x+1}$. En identifiant avec l'expression $\frac{x^2}{x+1}$, on trouve a = 1, b = -1 et c = 1 : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

b. Pour calculer l'intégrale I, on peut alors calculer $\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$.

On a $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

3. Comme la fonction f est positive sur [0 ;1], l'aire cherchée est donnée, en unités d'aires, par $A = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

Posons $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x}dx}_{\frac{1}{2}I} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}I = \frac{1}{4}.$$

4. La fonction *f* est continue (car dérivable), strictement croissante sur [0 ;1]. Comme $f(0)=0$ et $f(1)=\ln 2 \approx 0,69$, le nombre $0,25 \in [f(0)\,;\,f(1)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires 0,25 a un unique antécédent dans [0 ; 1].
A l'aide de la calculatrice, on trouve que $\alpha \approx 0,56$.

Partie B : étude d'une suite

1. Etudions le signe de $u_{n+1}-u_n$: $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx-\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx=\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,dx$.

Sur [0 ;1], $(x-1)$ est négatif et $x^n\ln(x+1)\geq 0$: l'intégrale d'une fonction négative est négative donc (u_n) est décroissante.

Est –elle convergente ? Sur [0 ;1], $x^n\ln(x+1)\geq 0$ donc par intégration, (u_n) est positive : la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle converge (pas forcément vers 0).

2. Sur [0 ; 1], la fonction ln étant croissante, on a $\ln(x+1)<\ln 2$ donc $x^n\ln(x+1)\leq x^n\ln(2)$ (car $x^n\geq 0$).

Par intégration, $u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx\leq\int_0^1 x^n\ln 2dx=\ln 2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{\ln 2}{n+1}$. On a donc bien $0\leq u_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}$.

Comme $\frac{\ln 2}{n+1}$ tend vers 0 à l'infini, d'après le théorème des gendarmes, la suite converge vers 0.

5. Exercice 4

D'après l'énoncé, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. $P(X>6)=1-P(X\leq 6)=1-\int_0^6\lambda e^{-\lambda x}dx=1-\left[e^{-\lambda x}\right]_0^6=e^{-6\lambda}$. On résout donc l'équation

$$e^{-6\lambda}=0,3\Leftrightarrow -6\lambda=\ln 0,3\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 0,3}{-6}=0,20066213...\approx 0,2.$$

2. On cherche *t* tel que $P(X\leq t)=0,5$. On a $P(X\leq t)=\int_0^t 0,2e^{-0,2x}dx=1-e^{-0,2t}$ donc

$P(X\leq t)=0,5\Leftrightarrow e^{-0,2t}=0,5\Leftrightarrow -0,2t=-\ln 2\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{0,2}\approx 3,47$, soit environ trois ans et six mois (au mois près).

3. La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $P(X>2)=1-\left(1-e^{-0,2\times 2}\right)=e^{-0,4}$.

4. Une loi exponentielle étant un processus sans mémoire, on a $P_{(X>2)}(X>6)=P(X>4)$ cad $e^{-0,2\times 4}\approx 0.45$.

5. Si *Y* est la variable aléatoire égale au nombre de robots sans pannes au cours des deux premières années, Y suit une loi binomiale de paramètres *n* = 10, $p=e^{-0,4}$.

On cherche donc $P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-\left(e^{-0,4}\right)^0\left(1-e^{-0,4}\right)^{10}\approx 0,9999$.