

1. Exercice 1

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Soit A le point de coordonnées $(1; 11; 7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0; 2; 1)$. »

Rappelons que H est le projeté orthogonal de A sur (P) ssi $\begin{cases} H \in (P) \\ \overline{AH} \text{ normal à } (P) \end{cases}$.

- Les coordonnées de H vérifient l'équation de (P) donc H est dans P.
- Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à (P) et on a $\overline{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc \overline{AH} n'est pas normal à (P). **Proposition 1 Fausse.**

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.

On appelle u la solution de (E) sur \mathbb{R} vérifiant $u(0) = 0$: **Proposition 2** : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$. »

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $u(x) = Ke^{-2x} + 1$, $K \in \mathbb{R}$: comme $u(0) = 1$, on a $K = -1$ et donc $u(x) = -e^{-2x} + 1$, $K \in \mathbb{R}$.

Par conséquent $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = -e^{-\ln(2)} + 1 = -e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$: **Proposition 2 Vraie.**

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 7$. »

Soit P(n) la proposition « $0 \leq u_n \leq 7$ ».

- P(0) est vraie puisque $u_0 = 2$ est compris entre 0 et 7.
- Supposons P(n) vraie cad que $0 \leq u_n \leq 7$: alors $0 \leq 7u_n \leq 49$ donc $0 \leq \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{49}$ puisque la fonction racine est croissante, cad $0 \leq u_{n+1} \leq 7$. **Proposition 3 Vraie.**

2. Exercice 2 (non spécialistes)

Soit le point A d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r .

a. Une écriture complexe de r est $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ soit $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

b. C est l'image de B donc l'affixe de C vérifie $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. Nous avons $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

d. Voir figure ci-dessous.

2. Soit D le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

a. L'affixe du barycentre est donnée par

$$z_D = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} = \frac{2(i) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}{3} = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

b. A l'aide du dessin, il semble que le centre du cercle en question soit O .

On vérifie en effet que $OA = OB = OC = OD = 1$: *rappelons au passage que* $|e^{i\theta}| = 1$.

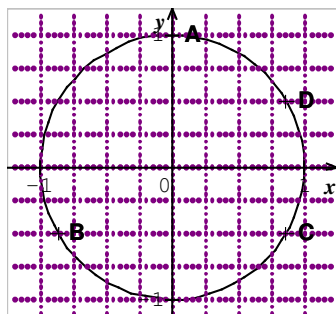
Les 4 points sont donc cocycliques (cad sur un même cercle), et appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h .

a. Une écriture complexe de h est donné par $z' - w = k(z - w)$ cad $z' = i + 2(z - i) \Leftrightarrow z' = 2z - i$.

b. E est l'image de D donc $z_E = 2z_D - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - i = \sqrt{3}$

4. a. Calculons le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$



b. Le rapport précédent s'écrit donc $z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$: D est donc l'image du point E par la rotation d centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$: le triangle DEC est donc isocèle en C , avec un angle en C de $\frac{\pi}{3}$.
 DEC est donc équilatéral.

3. Exercice 2 (spécialistes)

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$, $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec a non nul : f est donc une similitude directe de rapport $|2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\arg(2 - 2i) = -\arg(1 + i) = -\frac{\pi}{4}$.

Son centre Ω a pour affixe l'unique solution de $z = (2 - 2i)z + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z_{\Omega} = -\frac{1}{5}(1 + 2i)$.

2. a. L'affixe du point B' , image du point B par f vérifie $z_{B'} = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -3 + 12i = -3(1 - 4i)$.

b. Pour montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CB'}(-4 + 8i)$ et $\overrightarrow{CA}(2 + i)$ sont orthogonaux.

Attention, pour parler de produit scalaire il faut revenir aux coordonnées cartésiennes.

On a donc $\overrightarrow{CB'}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie bien que $\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Les droites (CB') et (CA) sont bien orthogonales.

3. Soit M d'affixe $z = x + iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f .

M' a pour affixe $z' = (2 - 2i)z + 1 = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = (2x + 2y + 1) + i(-2x + 2y)$

Les vecteurs $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ -2x + 2y - 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$2(2x + 2y) + (-2x + 2y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y = 4 \text{ donc ssi } x + 3y = 2.$$

4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Le couple $(x_0, y_0) = (-4; 2)$ est une solution de (E) puisque $-4 + 3 \times 2 = 2$.

b. Résolvons l'équation (E).

Soit (x, y) un couple solution de (E) : $x + 3y = 2 = x_0 + 3y_0 \Leftrightarrow x - x_0 = 3(y_0 - y)$.

Ainsi, 3 divise $x - x_0$ donc il existe un relatif k tel que $x - x_0 = 3k$.

Substituons cette valeur dans l'équation précédente, il vient $3k = 3(y_0 - y) \Leftrightarrow y = y_0 - k$.

Réciproquement, on vérifie que les couples $(x_0 + 3k, y_0 - k)$ sont solutions de (E) et on en déduit que les solutions de (E) sont les couples $(x_0 + 3k, y_0 - k)$ où k est un relatif quelconque et $(x_0, y_0) = (-4; 2)$.

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et \overrightarrow{CA} soient orthogonaux.

Nous cherchons ainsi, les points M de coordonnées $(-4 + 3k, 2 - k)$ où les coordonnées sont des entiers de $[-5; 5]$.

$$\text{Nous avons donc } \begin{cases} -5 \leq -4 + 3k \leq 5 \\ -5 \leq 2 - k \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3k \leq 9 \\ -7 \leq -k \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/3 \leq k \leq 3 \\ -3 \leq k \leq 7 \end{cases} \text{ et comme } k \text{ est entier, } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Il y a ainsi $M_0(-4, 2)$, $M_1(-1, 1)$, $M_2(2, 0)$ et $M_3(5, -1)$.

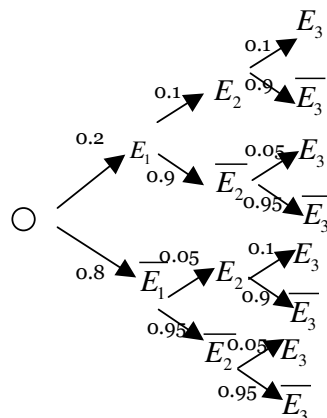
4. Exercice 3

La probabilité que le joueur perde la première partie est 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

Remarque : la loi binomiale n'est pas adaptée ici puisque les tirages ne sont visiblement pas indépendants.

De plus, la formulation des conditions « s'il gagne... » conduit inévitablement aux probabilités conditionnelles et aux arbres pondérés (en plus ils le disent !!).



1. On appelle :

E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;

E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties. **On pourra s'aider d'un arbre pondéré.**

a. On joue 3 parties donc X peut prendre pour valeurs 0, 1, 2, 3.

b. $P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) + P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) + P(\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$ et avec les méthodes usuelles pour déterminer la probabilité d'une intersection à partir d'un arbre, on obtient

$$P(X = 2) = 0.2 \times 0.1 \times 0.9 + 0.2 \times 0.9 \times 0.05 + 0.8 \times 0.05 \times 0.1 = 0.031.$$

De même, $P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0.2 \times 0.1 \times 0.1 = 0.002.$

c. Pour déterminer la loi de probabilité de X , il reste à déterminer la probabilité des autres valeurs que peut prendre par X : $P(X = 0) = 0.8 \times 0.95 \times 0.95 = 0.722$ et comme la somme des probabilités d'une v.a. est égale à 1, on a $P(X = 1) = 1 - (0.722 + 0.002 + 0.031) = 0.245.$

La loi de X est donc : $P(X = 0) = 0.722$, $P(X = 1) = 0.245$, $P(X = 2) = 0.031$ et $P(X = 3) = 0.002.$

d. On a $E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X = k) = 0 \times 0.722 + 1 \times 0.245 + 2 \times 0.031 + 3 \times 0.002 = 0.313.$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n -ième partie », \bar{E}_n l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n .

a. On peut encore s'aider de l'arbre on changeant le nom des événements.

On trouve $p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0.1$ et $p(\bar{E}_n \cap E_{n+1}) = p(\bar{E}_n) \times p_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0.05.$

b. D'après la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\bar{E}_n \cap E_{n+1})$ soit d'après les questions précédentes, $p_{n+1} = 0.1p_n + (1 - p_n) \times 0.05 = 0.05 + 0.05p_n.$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

a. Montrons que (u_n) est une suite géométrique et calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{20} - \frac{1}{19} = \frac{1}{20} p_n + \frac{-1}{19 \times 20} = \frac{1}{20} \left(p_n - \frac{1}{19} \right) = \frac{1}{20} u_n.$$

Cette suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{20}$ et de premier terme $u_0 = 0.2 - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$.

b. Ainsi $u_n = \frac{14}{95} \left(\frac{1}{20} \right)^n$ donc $p_n = \frac{14}{95} \left(\frac{1}{20} \right)^n + \frac{1}{19}$.

c. Vu que $-1 < \frac{1}{20} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{20} \right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{19}$.

5. Exercice 4

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

(P1) la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée ;

(P2) $e^0 = 1$;

(P3) pour tout réel x , on a $e^x > x$;

(P4) soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A; +\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A; +\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. Soit g la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

- g est dérivable et $g'(x) = e^x - x$ (d'après P1).
- La fonction g est donc strictement croissante sur I d'après P3.
- On par ailleurs $g(0) = 1$ d'après P2 donc la fonction g est minorée par 0.

Ainsi pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

Remarque : voici une autre jolie méthode, bien qu'elle ne soit pas complètement dans l'esprit des prérequis. D'après P1, la fonction exp est continue sur l'intervalle I donc elle admet une primitive (qui est elle-même, toujours d'après P1).

Ainsi d'après P3, $e^t > t$ donc $\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x t dt \Leftrightarrow e^x - e^0 \geq \frac{x^2}{2}$. Or $e^0 = 1$ (P2) donc on a $e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1 \geq 0$!

b. On en déduit que $e^x \geq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$ puisque x est positif : et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après P4, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. On appelle f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Une exponentielle est toujours positif donc sur $I = [0; +\infty[$, f est positive.

b. Posons $X = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = -2X : f(x) = -\frac{X}{2}e^X = -\frac{1}{2}(Xe^X)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$ et d'après les résultats de croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$.

C admet donc la droite horizontale d'équation $y = 0$ comme asymptote en $+\infty$.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0; +\infty[$.

f est dérivable et on a $f'(x) = \frac{1}{4} \left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8} (2-x)$: une exponentielle étant toujours positive f est du signe de la fonction affine $2-x$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0 -
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{e^{-1}}{2} \searrow$	0

On en déduit le tableau suivant :

3. On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a. Par définition, F est la primitive de f qui s'annule en 0 : par conséquent, $F'(x) = f(x)$ est positive (d'après le tableau ci-dessus, f est minorée par 0) et donc F est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.

b. Pour montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, il suffit de vérifier que $F'(x) = f(x)$ et que $F(0) = 0$.

Ca marche...

c. Nous avons déjà vu (2b) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = 0$: comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

A l'aide du 3a, on trouve alors :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	0	+
$F(x)$	0	$\nearrow 1$

d. La fonction F est continue (puisque dérivable) sur $I = [0; +\infty[$. De plus elle est strictement croissante sur I et passe d'une valeur inférieure à 0.5 ($F(0) = 0$) à une valeur supérieure à 0.5 ($\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$) : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F(x) = 0.5$ admet une unique solution sur I .

A l'aide de la calculatrice, déterminer $\alpha \approx 3.36$.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

Comme la fonction f est positive sur I , $A_n = \int_0^n f(x)dx$ et donc $A_n = F(n)$ puisque $F(0) = 0$.

On cherche donc le plus petit entier naturel n tel que $F(n) \geq 0,5$ et comme F est croissante, cela équivaut à $n \geq \alpha$ donc $n = 4$ est l'entier cherché.