Corrigé

France 2007

Exercice 1

Soient $(P): x+2y-z+1=0$ et $(P'): -x+y+z=0$.

1. Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Or on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.\vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-1+2-1=0$ donc ces plans sont bien perpendiculaires.

2. Par conséquent, ces plans s'interceptent suivant une droite. Remplaçons les cordonnées d'un point de la droite proposée (d) dans chacun des 2 plans.

Comme $\left(-\frac{1}{3}+t\right)+2\left(-\frac{1}{3}\right)-(t)+1=...=0$, la droite d est incluse dans le plan (P).

Comme $-\left(-\frac{1}{3}+t\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+(t)=...=0$, la droite d est incluse dans le plan (P').

La droite d : $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}+t\\ y=-\frac{1}{3}\\ z=t\end{cases}$ est donc la droite d'intersection cherchée.

3. Il s'agit ici d'utiliser la formule du cours, avec $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$: on a $d\left(A,(P)\right)=\frac{|0+2\times1-1+1|}{\sqrt{1+2^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ et

$d\left(A,(P')\right)=\frac{|-0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Bon là , faites un petit dessin : deux plans P et P' perpendiculaires, d la droite d'intersection.

A un point extérieur aux deux plans : la distance de A à d est la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur d. Notons A' le projeté orthogonal de A sur P'.

Le triangle AA'H est rectangle en A', de coté de longueurs AH, d(A,P) et d(A,P') : d'après le théorème de Pythagore, $d\left(A,(d)\right)^2=AH^2=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=2$ donc la distance cherchée est $\sqrt{2}$.

Les coordonnées du point *J* sont donc (-1 ;7 ;6).

Exercice 2

1. ROC : u et v étant dérivables, $u\times v$ l'est aussi. On a $(u\times v)'=u'v+v'u$.
   Comme les fonctions u et v sont à dérivées continues, et que u et v sont dérivables, le membre de droite est une fonction continue donc la fonction $(u\times v)'$ l'est aussi.
   On peut alors intégrer : $\int_a^b(u\times v)'=\int_a^b(u'v+v'u)\Leftrightarrow\int_a^b(u\times v)'=\int_a^b u'v+\int_a^b v'u\Leftrightarrow\int_a^b u'v=\int_a^b(u\times v)'-\int_a^b v'u$: on obtient donc bien la formule d'IPP.

2. **a.** Posons $I = \int_0^\pi e^x \sin(x)dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos(x)dx$.

Faisons une IPP sur I : $\begin{cases} u = \sin(x) \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos(x) \\ v' = e^x \end{cases}$ d'où $I = \underbrace{\left[\sin(x) \times e^x\right]_0^\pi}_{0} - \underbrace{\int_0^\pi e^x \cos(x)dx}_{J} = -J$.

De même, sur J : $\begin{cases} u = \cos(x) \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\sin(x) \\ v' = e^x \end{cases}$ d'où $I = \left[\cos(x) \times e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (-\sin x)\, dx = -e^\pi - 1 + J$.

b. Il suffit alors de résoudre le système $\begin{cases} I = -J \\ I = J + e^\pi + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ 2I = e^\pi + 1 \; (L1) + (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = -\dfrac{e^\pi + 1}{2} \\ I = \dfrac{e^\pi + 1}{2} \end{cases}$.

Exercice 3 – non spé

Partie A

Soit (E) l'équation $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$: posons $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$.

1. i est solution de (E) ssi P(i) = 0 : or $P(z) = i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = ... = 0$ puisque $i^3 = i^2 i = -i$.
2. Le polynôme P admet i comme racine donc d'après le cours, il se factorise par (z-i).
Autrement dit, il existe des complexes a, b et c tels que $P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$.
Remarquons que pour ceux qui la connaissent, la méthode de la division euclidienne permet de déterminer rapidement a, b et c.
Développons $(z-i)(az^2 + bz + c) = ... = z^3(a) + z^2(b - ia) + z(c - ib) - ic$: par identification avec $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$, on a $\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -4 - i \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \\ c = 13 \end{cases}$.
3. Par conséquent, $P(z) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z - i = 0 \\ z^2 - 4z + 13 = 0 \end{array} \right.$: le second membre est un trinôme à coefficients réels, de discriminant négatif. Les méthodes habituelles donnent pour racines : $z = 2 + 3i,\ z' = \overline{z}$.
Ainsi les solutions de (E) sont i, 2+3i et 2-3i.

Partie B

Posons A(i), B(2+3i) et C(2-3i) (rassurant d'après les précédentes racines…)

1. La rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$ où M(z) a pour image M'(z').
Comme A' = r(A), on a : $z_{A'} = z_B + e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B) = 2 + 3i + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(i - (2+3i)) = ... = 2 + i(3 - 2\sqrt{2})$.
2. Pour montrer que les points A', B et C sont alignés il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{A'B}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{A'B}(z_B - z_{A'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B}\left(i(6 - 2\sqrt{2})\right)$ et $\overrightarrow{BC}(z_C - z_B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}(-6i)$: ces deux vecteurs sont colinéaires au vecteur $\vec{v}(i)$ donc ils sont colinéaires entre eux.
Rappelons que par définition, l'homothétie de centre Ω et de rapport k vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$: ici,

$\overrightarrow{BA'}\left(-i\left(6-2\sqrt{2}\right)\right)=-\dfrac{6-2\sqrt{2}}{6}\overrightarrow{BC}\left(6i\right)$ cad $\overrightarrow{BA'}=-\dfrac{6-2\sqrt{2}}{6}\overrightarrow{BC}$: l'homothétie de centre B qui transforme C en A' est donc de rapport $k=-\dfrac{6-2\sqrt{2}}{6}$.

Son écriture complexe est donc $z'-z_B=k\left(z-z_B\right)$ avec $k=-\dfrac{6-2\sqrt{2}}{6}$ et B(2+3i)…

Exercice 3 - spé

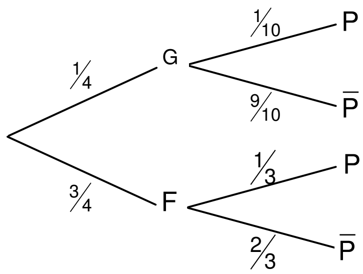
Plus tard…

Exercice 4

1. Si X désigne le nombre de produit vendus, X suit une loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0.2. En effet, voir 5 clients par jour revient à répéter 5 fois, de manière identique et indépendante, le rdv avec un seul client, qui achètera avec une probabilité p = 0.2.

Ainsi, $P\left(X=2\right)=\binom{5}{2}0.2^2 0.8^3$: réponse d.

2. Représentons la situation par un arbre :



D'après la formule des probabilités totales,

$P\left(P\right)=P\left(P\cap G\right)+P\left(P\cap F\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=0.275$:

réponse b.

3. On a $P_P\left(G\right)=\dfrac{P\left(P\cap G\right)}{P\left(P\right)}=\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{0.275}\approx 0.091$: réponse b.

4. Rappelons que l'aire d'un disque de rayon r est πr^2 : la zone la plus éloignée du centre a pour aire $A=\pi\left(30^2-20^2\right)=500\pi$. L'aire de la cible est donnée par $B=\pi 30^2=900\pi$.

La probabilité cherchée est donc $p=\dfrac{500\pi}{900\pi}=\dfrac{5}{9}$: réponse a.

Exercice 5

PARTIE A

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle]-1 ; +∞ [par : $f\left(x\right)=x-\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{1+x}$.

1. f est dérivable sur I et on a : $f'\left(x\right)=1-\dfrac{\frac{1}{1+x}\times\left(1+x\right)-\ln\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^2}=1-\dfrac{1-\ln\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^2}=\dfrac{\left(1+x\right)^2-1+\ln\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^2}$.

2. Posons (comme par hasard) $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$: $N'(x)=2(1+x)+\dfrac{1}{1+x}$.

Mais sur I, x > -1 donc 1+x > 0 et pour tout x de I, N'(x) > 0. Le fonction N est donc croissante sur I.

Par ailleurs, N(0) = 1 - 1+ ln(1) = 0.

Etant croissante, la fonction N est négative avant 0 et positive après.
Le tableau suivant est incomplet (limites… : il est donné à titre illustratif.

x	-1		0		+∞
N (x)		↗	0	↗	
N (x)		-	0	+	

Comme $f'(x)=\dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$, f' est du signe de f.

Ainsi, f est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

3. Les points d'intersection de C et de D : y = x ont pour abscisse(s) les solutions de f(x) = x.
Or, $f(x)=x \Leftrightarrow x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=x \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0 \Leftrightarrow \ln(1+x)=0 \Leftrightarrow 1+x=1$: il existe donc un unique points d'intersection , celui d'abscisse 0 et donc d'ordonnée f(0) = 0.

PARTIE B

1. La fonction f est croissante sur [0 ;4] donc $0\le x\le 4 \Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(4) \Rightarrow 0\le f(x)\le 4$ puisque $f(4)=4-\dfrac{\ln(5)}{5}\le 4$.

2. **a.** Voir la partie animations du site pour le tracé de termes de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$.

b. Démontrons par récurrence que pour tout n, $u_n\in[0;4]$.

Soit P(n) la proposition « $u_n\in[0;4]$ ».

-- P(0) est vraie puisque $u_0=4$.

-- Supposons P(n) vraie cad que $u_n\in[0;4]$. D'après le B1, on sait alors que $f(u_n)\in[0;4]$ cad $u_{n+1}\in[0;4]$. La proposition est donc héréditaire.

-- Ainsi, pour tout n, $u_n\in[0;4]$.

c. *Remarquons qu'un raisonnement par récurrence marcherait encore très bien : P(n) « $u_{n+1}\le u_n$ » puisque la fonction f croît sur I. Mais restons « simple » :*

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$: mais $u_n\ge 0$ donc $1+u_n\ge 1\ (\ge 0)$ et $\ln(1+u_n)\ge \ln(1)\ge 0$ par croissance de ln. Ainsi, $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}\le 0$ et la suite décroît.

d. La suite est décroissante, minorée par 0 donc elle converge : notons L sa limite.

e. Comme $u_n\in[0;4]$, on a $L\in[0;4]$. La fonction f est continue sur cet intervalle donc, comme $u_{n+1}=f(u_n)$, par passage à la limite $L=f(L)\Leftrightarrow L=0$ d'après la partie A3.