

Vous trouverez ici les démonstrations que vous avez officiellement dues faire en cours (dans le programme). Il est important de préciser que cela ne signifie en aucun cas qu'il ne faille pas connaître les autres...

D'autres ROC classiques seront aussi traitées, mais sachez que le jour du Bac, vous pouvez très bien avoir une ROC que vous n'aurez jamais traité ou une ROC à démontrer différemment.

C'est pourquoi votre intérêt n'est pas d'apprendre les démonstrations par cœur, mais plutôt de comprendre comment elles fonctionnent, quelle est l'idée directrice des raisonnements, quels sont les prérequis...

Exemples de ROC sur les complexes : module et argument

Définition : Pour tout nombre complexe z , il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $z = x + iy$: cette écriture est appelée forme algébrique de z .

On note alors $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z et $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ son module.

Propriété : $|z|^2 = z\bar{z}$.

Démo : $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. □

Propriété : Soient deux complexes z et z' et leur quotient $\frac{z}{z'}$, le conjugué de $\frac{z}{z'}$ est $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Démo : $\frac{z}{z'} = \frac{z}{z'} \times \frac{\bar{z}'}{\bar{z}'} = \frac{z\bar{z}'}{|z'|^2} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{|z'|^2} = \frac{(xx' + yy') + i(-xy' + yx')}{|z'|^2}$ donc, comme $|z'|^2$ est un réel,
 $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{(xx' + yy') + i(xy' - yx')}{|z'|^2}$. D'un autre coté, $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \times \frac{z'}{z'} = \frac{\bar{z}z'}{|z'|^2} = \frac{(x - iy)(x' + iy')}{|z'|^2} = \frac{(xx' + yy') + i(xy' - yx')}{|z'|^2}$.

On a donc l'égalité cherchée. □

Propriété : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Démo : $\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \left(\frac{z}{z'}\right)\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$. L'égalité des modules s'en déduit puisque ces derniers sont positifs. □

Définition : Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan et z un complexe non nul. On note M le point d'affixe z .
On appelle argument de z , noté $\arg(z)$, une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$.

Rappel : $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$.

Propriété : $\arg(z_{\overline{AB}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

Démo : Soit C le point du plan tel que $\overline{AB} = \overline{OC}$: alors $z_C = z_{\overline{AB}}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \arg(z_C) = \arg(z_{\overline{AB}})$. \square

Définition : Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan.

Tout nombre complexe z admet une unique écriture de la forme $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$.
Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z .

→ **Tout part de là !**

Théorème : $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$.

Démo : On a :

$$z \times z' = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) = rr' [\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))]$$

A l'aide des formules trigonométriques, on en déduit que $z \times z' = rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$.

Par unicité de l'écriture trigonométrique, on en déduit bien que $\arg(z \cdot z') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$. \square

Corollaire : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Démo :

- Nous savons que $\arg(1) = 0$.
- Appliquons le théorème précédent à $z' = \frac{1}{z}$: $zz' = 1$ donc il vient

$$\arg(1) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 0 = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \text{ d'où le résultat cherché. } \square$$

Corollaire : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

Démo : Appliquons le théorème précédent à " $z' = \frac{1}{z'}$ " : il vient $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
d'après le corollaire précédent. \square

Définition : Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan. Posons $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Tout nombre complexe z admet une unique écriture de la forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

Cette écriture est appelée forme exponentielle de z .

Propriété : $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Démo : il s'agit d'appliquer les résultats précédents à z et z' avec $r = 1$ et $r' = 1$. □

Propriété : Pour tout entier n , on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Démo : Soit $P(n)$ la proposition « $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ».

- $P(0)$ est vraie puisque $(e^{i\theta})^0 = 1$ et $e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$.
- Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$: alors $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n (e^{i\theta})^1 = e^{in\theta} e^{i\theta}$.
Et comme $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, il vient $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ donc $P(n+1)$ est vraie. □

Propriété : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ avec les notations usuelles, où A et B , C et D sont deux à deux distincts.

Démo : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$. □

ROC sur l'écriture complexe des transformations

Propriété : Soit t la translation de vecteur \vec{u} d'affixe u qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

L'écriture complexe de t est $z' = z + u$.

Démo : M a pour image M' dans la translation de vecteur \vec{u} si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = u \Leftrightarrow z' = z + u$ car deux vecteurs sont égaux ssi leurs affixes sont égales. □

Propriété : Soit h l'homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

L'écriture complexe de h est $z' - w = k(z - w)$.

Démo : M a pour image M' par cette homothétie ssi $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - w = k(z - w)$ car deux vecteurs sont égaux ssi leurs affixes sont égales. □

Propriété : Soit R la rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

L'écriture complexe de R est $z' - w = e^{i\theta} (z - w)$.

Démo : M a pour image M' par cette rotation ssi $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \\ \Omega M = \Omega M' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \\ \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) = \theta \\ \left|\frac{z' - w}{z - w}\right| = 1 \end{cases}$.

Posons alors $Z = \frac{z' - w}{z - w}$: Z est un complexe de module 1 et d'argument θ donc $Z = e^{i\theta}$. Ainsi on a

$$\frac{z' - w}{z - w} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta} (z - w). \quad \square$$

La définition qui suit n'est pas la première définition du plan que l'on voit en Terminale S.

Initialement, un plan est défini par :

P est un plan s'il existe :

- Un point A de l'espace.
- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires

tels que pour tout point M de P, $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont deux réels (les coordonnées de M dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v})).

Cette définition peut aussi s'obtenir en utilisant les barycentres.

Cependant la caractérisation suivante est souvent prise comme point de départ pour tous les raisonnements.

Définition : Le plan P qui passe par A et de vecteur normal \vec{n} (non nul) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Théorème :

- Soit (P) le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.
Alors une équation cartésienne de (P) a la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel.
- Réciproquement, soit (P) l'ensemble des points M(x ; y ; z) tel que $ax + by + cz + d = 0$.
Alors (P) est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Démo :

Première implication : (P) le plan passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Par définition $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan ssi $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$: posons

alors $d = -ax_A - by_A - cz_A$. On obtient $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan ssi $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement : soit (P) l'ensemble des points M(x ; y ; z) tel que $ax + by + cz + d = 0$.

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple a.

Par conséquent, le point $A \left(-\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$ appartient à (P).

Par une méthode maintenue devenue classique (équation diophantienne pour les spé...), on a alors $ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = ax_A + by_A + cz_A + d \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

On reconnaît bien la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: d'après la définition d'un plan, on a donc M est dans (P) ssi M est dans le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

P est donc ce plan. □

Que ferions nous sans les définitions ...

Définition : La droite (D), qui **passer par A** et de **vecteur directeur** \vec{u} est l'ensemble des points M tel que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires.

La réciproque au résultat suivant étant très simple, nous nous contenterons d'établir une seule implication :

Théorème : Soit (D) la droite (D) passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est sur (D) ssi il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$.

Démo : Par définition, un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est sur (D) ssi \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires donc ssi il existe un réel t tel que

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Comme deux vecteurs sont égaux ssi leurs coordonnées sont égales, $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est sur (D) ssi il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$. □

ROC sur l'espace : distance d'un point à un plan

Définition : Soit A un point de l'espace et (P) un plan. H est le projeté orthogonal de A sur (P) si

- H appartient à (P)
- (AH) est orthogonal à (P)

Théorème : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

Alors la distance de A à P est $d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Démo : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$: notons H le projeté orthogonal de A sur P. **Il faut donc calculer la distance AH.**

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$ de 2 manières différentes.

(1) $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) = ax_H + by_H + cz_H - ax_A - by_A - cz_A$.

Mais H est par définition dans le plan (P) donc on a $ax_H + by_H + cz_H = -d$ et finalement $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A - cz_A - d$.

(2) Le vecteur \vec{n} est normal à P donc par définition de H, \overrightarrow{AH} est colinéaire à \vec{n} .

Alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \pm \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| = \pm AH \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Par identification de ces 2 expressions, $AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (les valeurs absolues apparaissent pour assurer que AH est positif). □

Maintenant que vous avez travaillé et essayé de comprendre tous ces ROC, la meilleure manière de vous entraîner reste d'en faire vous-même ! (voir les sujets de Bac du site).

Bilan : si vous devez retenir quelque chose : « *Tout part des définitions !!* », donc en ce qui vous concerne des *prérequis du ROC*.

Il vous suggéreront la méthode à employer et les outils à utiliser.

Bon Courage, et posez vos questions ou signalez les erreurs sur le Forum.