

Concours Fesic**Correction****Exercice 1**

A d'affixe i , h homothétie de centre A et de rapport 2, t translation de vecteur \vec{v} , r rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. **Vrai.** L'écriture complexe de l'homothétie de centre A(i) et de rapport 2 est donnée par :

$$M' = h(M) \Leftrightarrow z' - i = 2(z - i) \Leftrightarrow z' = 2z - i.$$

b. **Faux.** L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{v}(i)$ est donnée par :

$$M' = t(M) \Leftrightarrow z' - z = i \Leftrightarrow z' = z + i.$$

c. **Vrai.** Une rotation étant une isométrie, si M' est l'image de M par R alors $AM' = AM$ donc A appartient bien à la médiatrice de $[MM']$.

d. **Faux.** Comme B' est l'image de B par la rotation, on a :

$$B' = r(B) \Leftrightarrow b' - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - i) \Leftrightarrow b' = i + i(4 - 3i - i) = 4 + 5i.$$

Exercice 2

Déterminons les écritures exponentielles de a et b (ce type d'écriture est conseillée pour tout travail avec des puissances) : $a = -\sqrt{5} + i\sqrt{15} = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{5}e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $b = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. **Vrai.** Ainsi, $a^n = \left(2\sqrt{5}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n = (2\sqrt{5})^n e^{i\frac{2n\pi}{3}}$.

b. **Faux.** De plus, par définition du module d'un complexe : $OA = |a| = 2\sqrt{5} \neq OB = |b| = 4$.

c. **Vrai.** La propriété des arguments d'un quotient donne : $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg \frac{b}{a} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

d. **Vrai.** D'après le c, le cercle circonscrit à OAB a pour diamètre $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 20 + 16 = 36 \Rightarrow \frac{1}{2}AB = 3$.

Exercice 3

A et B d'affixes respectives 1 et $2i$. (E) : $|z - 2i| = |z - 1|$; (F) : $\arg\left(\frac{z - 2i}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a. **Faux.** Rappelons que $|z_M - z_A| = AM$ donc M(z) appartient à (E) ssi $AM = BM$: (E) est la médiatrice de $[AB]$.

b. **Faux.** Rappelons que $\arg\left(\frac{z - 2i}{z - 1}\right) = \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) = (\overline{BM}, \overline{AM}) = (\overline{MB}, \overline{MA}) [2\pi]$

Par conséquent, M appartient à (F) ssi $(\overline{MB}, \overline{MA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$: les points M de (F) décrivent un **demi-cercle** de diamètre $[AB]$ sauf les deux points A et B.

c. **Vrai.** Vérifions que C satisfait la contrainte de (E) puis celle de (F).

$$\rightarrow \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 2i \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1 \right| \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \left| -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right| \text{ donc } C \text{ est sur (E) ;}$$

$$\rightarrow \arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{-1-3i}{-3+i}\right) = \arg\left(\frac{(-1-3i)(-3-i)}{10}\right) = \arg\left(\frac{10i}{10}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} : C \text{ est sur (F).}$$

d. **Faux.** La même méthode que celle du b permet d'affirmer que l'ensemble des points M tels que

$Z = \frac{z-2i}{z-1}$ est un imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ sauf les deux points A et B .

Exercice 4

L'une de ces courbes représente une fonction f définie et continue sur $[0; +\infty[$; l'autre représente une primitive F de f sur $[0; +\infty[$.

a. **Vrai :** Le minimum de Γ est en 1 où « s'annule C » donc C représente la dérivée $f = F'$ et Γ la fonction F (le même raisonnement sur C permet aussi de conclure par élimination).

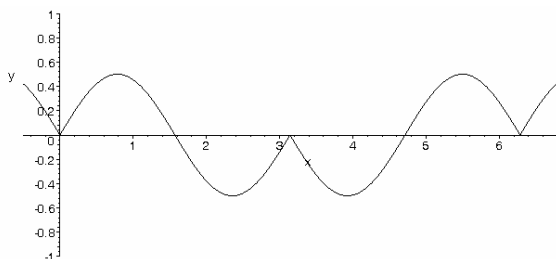
b. **Vrai :** F est la primitive de f qui s'annule en 0 donc on a $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

c. **Vrai :** L'aire de la surface hachurée est $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = F(0) - F(1) = -F(1)$; celle de la surface grisée est

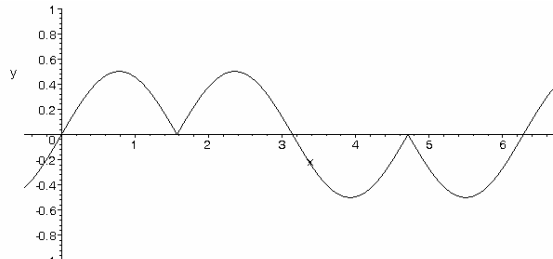
$$\left| \int_1^{\sqrt{e}} f(t) dt \right| = F(\sqrt{e}) - F(1) = -F(1) \text{ puisque } F(\sqrt{e}) = 0.$$

d. **Faux :** F est deux fois dérivable en 0 si $F' = f$ est dérivable en 0 : ceci est faux puisque sa courbe admet une tangente verticale en 0.

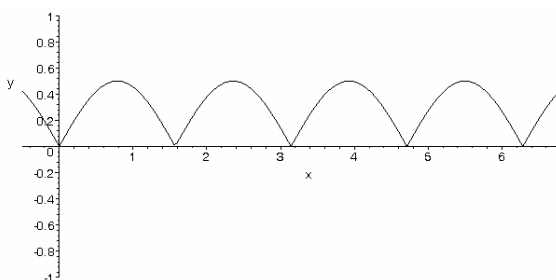
Exercice 5



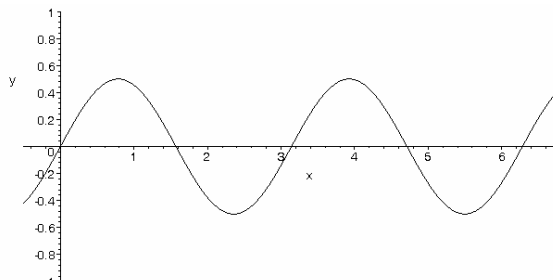
f : Courbe C_1



g : Courbe C_2



h : Courbe C_3



k : Courbe C_4

a. **Vrai :** C_2 est la translatée de C_1 suivant \vec{u} (vecteur unitaire des abscisses) donc $g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$.

b. **Vrai :** tout ce qui est négatif sur f devient positif, et ce qui est positif ne change pas : $h(x) = |f(x)|$.

c. **Vrai** : Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ on a $f(x) - g(x) = 0$ et $h(x) - k(x) = 0$; sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ on a $f(x) - k(x) = 0$ et $g(x) - h(x) = 0$.

d. **Faux** : Le maximum de C_4 est en 0,5 et non en 1 ; ce serait plutôt $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 6

a. **Faux** : ce théorème n'existe pas. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x} - 0\sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ donc par définition la fonction qui à x associe $x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 de dérivée 0.

b. **Faux** : Comme la suite converge, sa limite vérifie $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right) \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + 2 \Leftrightarrow l^2 = 2 \Rightarrow l = \sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel (la limite d'une suite de rationnels n'est pas forcément rationnelle).

c. **Vrai** : les calculs sont justes et on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; A, B et C sont alignés ssi

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 1, \text{ soit pour } |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = AB \times AC.$$

d. **Faux** : le théorème de composition des limites n'est valable que s'il opère sur des fonctions continues, ce que n'est pas la fonction E qui est discontinue pour toutes les valeurs entières de x (comme 0 !).

Rappelons que $E(x) = -1$ pour $x \in [-1; 0[$ et si x tend vers 0^- , alors $\sin(x)$ tend vers 0^- donc $E(\sin(x))$ tend vers -1.

Exercice 7

a. **Faux** : On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \ln(1+x) - 2 \ln x}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{2}{x^2} \ln x$. Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite de référence) et

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x^2} \ln x = -\infty$ puisque \ln tend vers $-\infty$: donc la fonction tend vers l'infini.

b. **Vrai** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} = 0$ puisque d'après les résultats de croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

c. **Vrai** : $e^{2x} + 3e^x + 2 \leq 0$ n'a pas de solution réelle car somme de termes strictement positifs.

d. **Faux** : en $+\infty$, e^{-x} tend vers 0 et l'emporte sur $\ln(1+x^2)$ (croissance comparée) ; la limite de f est donc 0, ce qui est incompatible avec le tableau de variations fourni.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$. Soient f la solution de (E) définie sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)e^{-3x}$.

a. **Vrai** : Evaluons (E) en $x = 0$: $y'(0) - 3y(0) = e^{3 \times 0} \Leftrightarrow y'(0) = 3 + 1 = 4$.

b. **Vrai** : calculons g' : $g'(x) = f'(x)e^{-3x} - 3f(x)e^{-3x} = (3f(x) + e^{3x})e^{-3x} - 3f(x)e^{-3x} = 1$ puisque $f'(x) - 3f(x) = e^{3x}$.

c. **Faux** : Comme $g'(x) = 1$ pour tout x , on en déduit que $g(x) = x + K \Rightarrow f(x) = (x + K)e^{3x}$.

Avec $f(0) = 1$, on obtient $K = 1$ d'où $f(x) = (x + 1)e^{3x}$.

d. **Vrai** : Si on intègre les deux membres de l'égalité $y' - 3y = e^{3x}$, on a

$$\int_0^x f'(t) - 3f(t) dt = \int_0^x e^{3t} dt \Leftrightarrow f(x) - f(0) - 3 \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}.$$

Exercice 9

On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx$.

a. **Vrai** : $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x} \times \ln(x)}_{u' \times u} dx = \left[\underbrace{\frac{1}{2} (\ln x)^2}_{\frac{1}{2} u^2} \right]_1^e = \frac{1}{2}.$

b. **Faux** : Calculons : $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^{n+1}} dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx.$

Or, sur $[1; e]$, $\frac{1}{x} - 1 \leq 0$ et les autres termes sont positifs. Rappelons que si f est négative sur $[a, b]$ alors son intégrale est négative aussi (avec a inférieur à b). La suite (I_n) est donc décroissante.

c. **Vrai** : Sur $[1; e]$, on encadre $\ln(x)$.

Comme elle est croissante, on a : $0 \leq \ln x \leq 1$ et comme x est positif, $0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{1}{x^n} = x^{-n}.$

Par intégration, il vient : $0 \leq I_n \leq \int_1^e x^{-n} dx = \left[\frac{1}{-n+1} x^{-n+1} \right]_1^e = \frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{e^{1-n}} - 1 \right).$

d. **Vrai** : $I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx$: on pose $u = \ln x$, $v' = x^{-n}$ d'où $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{1-n} x^{1-n}$, soit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx = \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{1-n} \int_1^e x^{1-n} x^{-1} dx = \frac{1}{1-n} e^{1-n} - \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_1^e \\ &= \frac{1}{1-n} e^{1-n} - \frac{1}{(1-n)^2} (e^{1-n} - 1) = \frac{(1-n-1)e^{1-n} + 1}{(1-n)^2} = \frac{1-ne^{1-n}}{(1-n)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}, \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases} \text{ et } w_n = v_n - u_n.$$

a. **Vrai** : $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{1}{5} (v_n - u_n) = \frac{1}{5} w_n$. Premier terme : $w_0 = v_0 - u_0 = 5$.

b. **Vrai** : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{5} = \frac{2}{5} w_n$ qui est positif (puisque w est géométrique de premier terme et de raison positive) : la suite u est donc croissante.

c. **Vrai** : on vérifie facilement (même méthode) que v est décroissante : comme $w_n = v_n - u_n$ tend vers 0 (suite géométrique de raison $q \in]-1; 1[$), les suites u et v sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une limite commune.

d. **Vrai** : Conséquence directe de l'adjacence des suites.

Exercice 11

a. **Vrai** : La démonstration par récurrence :

Soit $P(n)$ la proposition « $1 < u_n < 2$ » :

$P(0)$ est vraie par hypothèse.

Supposons $P(n)$ vraie au rang n : $1 < u_n < 2 \Rightarrow -2 < u_n - 3 < -1 \Rightarrow \frac{-1}{2} > \frac{1}{u_n - 3} > -1$ par décroissance de la

fonction inverse sur \mathbb{R}_-^* donc, en multipliant par -2 , $1 < \frac{-2}{u_n - 3} < 2$ cad $1 < u_{n+1} < 2$.

b. **Vrai** : La suite u étant bornée, étudions la monotonie de la suite :

$u_{n+1} - u_n = \frac{-2 - u_n^2 + 3u_n}{u_n - 3} = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n - 3} < 0$ donc u est décroissante ; comme elle est minorée, elle converge.

c. **Vrai** : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{-2}{u_n - 3} - 2}{\frac{-2}{u_n - 3} - 1} = \frac{-2 - 2u_n + 6}{-2 - u_n + 3} = \frac{2u_n - 4}{u_n - 1} = 2v_n$; $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = -1$.

d. **Vrai** : D'après le c, on a $v_n = -2^n$ et donc

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2^n + 2}{2^n + 1}$, soit le résultat demandé :
 $u_n = 1 + \frac{1}{1 + 2^n}$.

Exercice 12

$f_n(x) = x^{n-1} \ln x$.

a. **Faux** : $f_n(x) = x^{n-1} \ln x = x^{n-2} (x \ln x)$: Or d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ et comme $n \geq 2$, soit $x^{n-2} = 1$ (pour $n = 2$), soit x^{n-2} tend vers 0 en 0.

Dans les deux cas, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$.

b. **Faux** : $x \in]0 ; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n-1} = 0$ et (x est fixé), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

c. **Vrai** : rappelons que lorsque f est dérivable, sa tangente au point $A(a, f(a))$ a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

$f_n(1) = 0$ et pour tout n supérieur à 3 : $f'_n(x) = (n-1)x^{n-2} \ln x + x^{n-2} \frac{1}{x} \Rightarrow f'_n(1) = 1$.

Donc pour tout n , la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$, indépendant de n .

d. **Faux** : D'après la somme de termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=2}^n x^{k-1} \ln x = (x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \ln x = x \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} \times \ln x.$$

Exercice 13

a. **Vrai** : Comme on remet les boules on a la probabilité $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ de tirer une noire puis de nouveau $\frac{1}{2}$ de retirer une noire, soit $\frac{1}{4}$ au total. Par ailleurs il y a 1 chance sur 2 d'avoir tiré dans U_1 .

b. **Faux** : $p_{U_1}(N) = \frac{1}{4}$ et $p_{U_2}(N) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{4n-2}$.

c. **Vrai** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{U_1}(N) = \frac{1}{4}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{U_2}(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$ d'après le résultat sur les fonctions rationnelles en l'infini.

d. **Vrai** : D'après la formule des probabilités totales,

$$p(N) = p(U_1 \cap N) + p(U_2 \cap N) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{2n-1+2n-2}{8(2n-1)} = \frac{4n-3}{8(2n-1)}.$$

Exercice 14

a. **Vrai** : D'après les résultats sur les lois exponentielles,

$$p(T \leq 1) = \int_0^1 f_\lambda(t) dt = 1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \ln 2.$$

b. **Faux** : On passe sur une loi binomiale ; X la variable aléatoire égale au nombre de détecteurs tombant en panne lors des deux contrôles suit une loi $B(2, 1/2)$.

$$\text{Ainsi, } p(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{c. Vrai : Même chose avec } n=5 : p(X=1) = \binom{5}{1} \frac{1}{2^1} \frac{1}{2^4} = \frac{5}{32}.$$

$$\text{d. Vrai : On a encore : } p(X=0) = \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^0}.$$

Exercice 15

$A(-1; 2; 4)$, $B(0; -2; 3)$, $C(7; 1; -1)$ et $D(-2; -2; -13)$.

a. **Faux** : Q le plan médiateur de $[CD]$ doit avoir comme vecteur normal $\overrightarrow{CD} = (-9; -3; -12)$ qui n'est pas colinéaire à $(8; -1; -5)$.

b. **Faux** : Un vecteur normal à P est $(1; 4; 4)$ non colinéaire à $\overrightarrow{AB} = (1; -4; -1)$.

c. **Vrai** : Calcul des distances toutes égales à 9. Rappelons que $d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

d. **Vrai** : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ dit que le triangle AMB est rectangle en M , c'est une caractérisation d'un cercle dans le plan ou d'une sphère de diamètre $[AB]$ dans l'espace (cours)

Exercice 16

P : $x + y = 0$; Q : $2x - y - z - 1 = 0$; R : $z = 1$.

a. **Faux** : P est un plan puisque son équation est du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = b = 1$ et $c = d = 0$.

b. **Vrai** : Rappelons que l'intersection de deux plans P et Q est un plan (si P et Q confondus), une droite (si P et Q s'intersectent sans être confondus) ou l'ensemble vide (si $P // Q$).

L'ensemble des points appartenant à la fois à P et à R est une droite car ce ne sont pas des plans parallèles : en effet, leurs vecteurs normaux ne sont pas parallèles.

c. **Faux** : Les vecteurs normaux de P et Q sont respectivement $\vec{n}_P = (1; 1; 0)$ et $\vec{n}_Q = (2; -1; -1)$.

Leur produit scalaire vaut 1 donc est non nul.

d. **Vrai** : On résout le système ou on vérifie que A est dans chaque plan (vu l'ambiguïté de la question)

D'après le corrigé de F. Laroche.