Fonctions
Nombre Dérivé – Fonction dérivée

Ce chapitre est le chapitre central de la classe de Terminale STG. Il permet (en partie) de clore ce qui avait été entamé dés le collège avec les fonctions affines : l'étude des fonctions.
L'objectif de ce chapitre est principalement de pouvoir déterminer les variations d'une focntion sans représentation graphique !
Lorsque nous étudierons des fonctions cout ou bénéfice, nous serons alors capables de déterminer le maximum de f, son minimum, les productions rentables pour l'entreprise… et tout ca, sans aucune représentation graphique.
Ce nouvel outil, la dérivation, est donc un puissant outil algébrique (c'est-à-dire lié au calcul).

Animations liées sur le site :

- Lire le signe, l'image... d'une fonction : ce qu'il faut savoir faire sur les fonctions avant d'entamer le chapitre.
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/fct_lecture-graphique/index.php

- Traceur de courbes : vous pouvez ici tracer deux courbes et déterminer graphiquement leurs positions relatives, les coordonnées des points d'intersection…
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/outil-graphique/index.php

- Tangente : une animation pour comprendre un peu mieux la notion de tangente à une courbe.
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/tangente/index.php

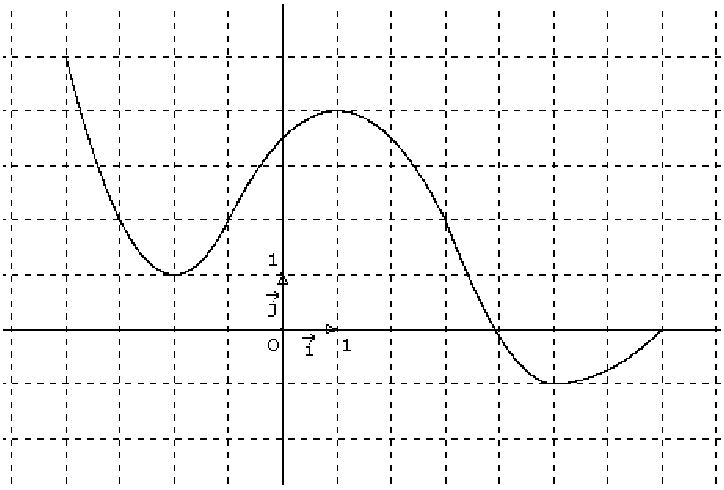
- Cours complet illustré : tout ce qu'il faut savoir et beaucoup plus que le programme de Stg. Faites uniquement les animations qui concernent votre section, à visiter en cours ou en fin de chapitre.
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/derive/index.php

Note
Tous les corrigés des exercices de ce chapitre se trouvent à la fin de ce document.

I - Rappels sur les fonctions

Les rappels seront traités à travers des exercices avec corrigés détaillés.
Pour des méthodes plus précises, si nécessaire, aller consulter les cours de Seconde du site sur les fonctions.

Exercice I-1 : Lecture graphique.



On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction *f*.

1. Donner le domaine de définition de *f*.

2a. Déterminer graphiquement l'image de 5 par la fonction *f*.
2b. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0.
2c. Préciser quels nombres ont pour image 5.

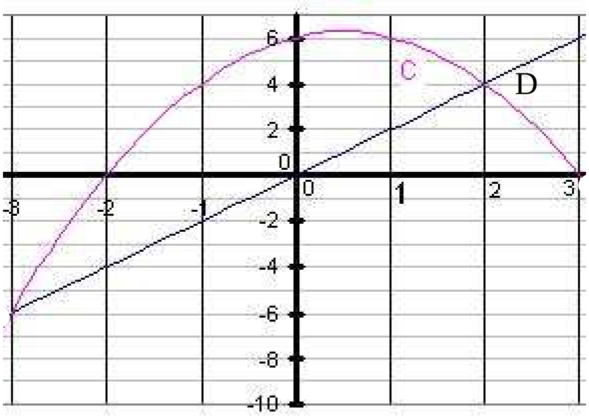
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$, puis résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.

4. Etablir le tableau de variation de la fonction *f*.

5. Etablir le tableau de signes de la fonction *f*.

Exercice I-2 : Lecture graphique.

Ci-dessous, C représente la fonction f et
D représente la fonction g sur l'intervalle [-3 ;3].



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

3. Dresser le tableau de signe de la fonction $f - g$.

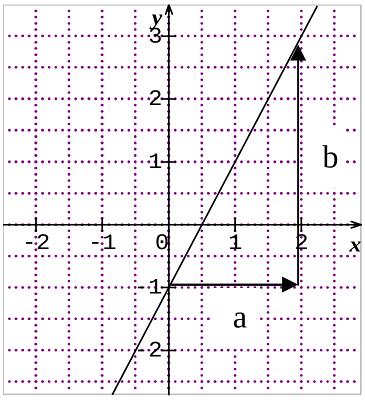
4. Quel semble être la valeur maximale de $f - g$?

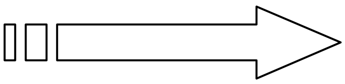
II – Premiers rappels sur les droites

Avant d'aborder sereinement la notion de nombre dérivé, il est utile de faire quelques rappels sur les droites… Ne négliger pas cette partie !

Propriété.
Toute droite non verticale du plan admet une équation du type y = mx + p où m est le coefficient directeur ou <u>pente de la droite</u>, et p son ordonnée à l'origine.

Méthode graphique pour connaître m.
$\rightarrow$ Par exemple, on peut lire graphiquement les coordonnées de deux points de la droite : si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points de la droite, alors $m = \dfrac{\text{variation } de\ y}{\text{variation } de\ x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
$\rightarrow$ On peut aussi appliquer la méthode directe suivante, en prenant n'importe quel point de la droite sur le quadrillage.





$$\boxed{m = \dfrac{\text{variation } de\ y}{\text{variation } de\ x} = \dfrac{b}{a}}$$

Rappelons que lorsque la droite monte, sa pente m est positive ; lorsqu'elle descend, sa pente est négative ; pour une droite horizontale, la pente est nulle.
Enfin, une droite verticale « a une pente infinie » : son équation est du type x = k où k est une constante.

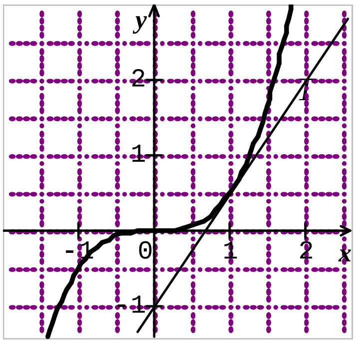
N'hésitez pas à aller vous entraîner avec l'activité suivante :
http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/droite-geop/index.php

II – Nombre et fonction dérivée

L'idée générale de cette partie exploite la réciproque du résultat précédent :
- si la pente d'une courbe est positive, alors la courbe monte
- si la pente d'une courbe est négative, alors la courbe descend
- si la pente d'une courbe est nulle, alors la courbe « s'aplatie ».

Justement, le nombre dérivé d'une fonction sera la pente de la courbe en un point donné.

Définition : tangente.
Beaucoup trop difficile pour être exposée ici, on se contentera de l'idée suivante : la tangente à une courbe au point d'abscisse a est **une droite** qui passe par A, en la frôlant.



Exemple.

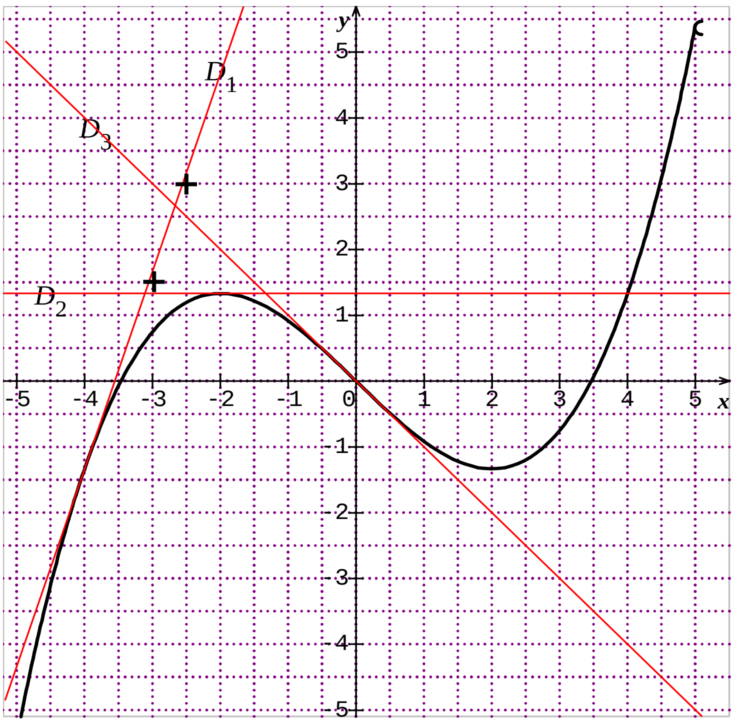
La droite T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Définition (Aspect Graphique).
On dit qu'une fonction f est dérivable en a si sa courbe représentative admet une tangente non verticale au point d'abscisse a.
Dans ce cas on **appelle nombre dérivé en a, noté f '(a), le coefficient directeur de cette tangente.**

Exemple.
Supposons que dans l'exemple précédent, C représente une fonction f. Calculons alors f'(1).
Par définition, f'(1) est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1, donc de T. Or le coefficient directeur de T est $\frac{3}{2}$ donc on a $f'(1)=\frac{3}{2}$.

Définition.
On appelle fonction dérivée d'une fonction f, la fonction notée f' qui à un nombre x associe le nombre f'(x) défini ci-dessus.

Exercice II-1.
Ci-contre sont représentées la courbe C d'une fonction f définie sur I = [-5 ;5] ainsi que 3 de ses tangentes : D1, la tangente à C au point d'abscisse –4, D2 celle au point d'abscisse –2 et D3, la tangente à C au point d'abscisse 0.
A l'aide de la définition précédente, répondre aux questions suivantes en lisant le graphique.



1. Déterminer graphiquement f ' (-4), f ' (-2) et f ' (0).
2. **a.** A quelle condition sur le coefficient directeur une droite est-elle horizontale ?
   b. En déduire les solutions de l'équation f ' (x) = 0.
3. **a.** A quelle condition une droite descend-t-elle ?
   b. En déduire les solutions de l'inéquation f ' (x) < 0.
4. Dresser le tableau de signes de la fonction dérivée f ' et dans le même tableau, le tableau de variations de la fonction f.
5. Quel lien pouvez vous établir entre le signe de
   f ' (x) et les variations de f ?
6. Si x est l'abscisse d'un sommet, que dire de f' (x) ?

Théorème (admis).
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
(1) Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
(2) Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
(3) Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

Ce théorème est une illustration de la question 4 de l'exercice précédent.

Rappelons que l'objectif de ce chapitre est entre autre de pouvoir dresser le tableau de variation d'une fonction sans pour autant connaître sa représentation graphique.
Pour l'instant, la notion de nombre dérivé n'apporte aucune réponse à ce problème puisque le nombre dérivé se lit graphiquement.

Aussi nous allons voir, dans la partie suivante, que nous pouvons calculer un nombre dérivé sans aucune représentation graphique.

III – Formules de référence

Le tableau suivant récapitule premières formules de dérivé à connaître en STG.

Si f(x) est égal à	Alors f '(x) =
k (nombre fixé)	0
x	1
$ax+b$ (fonction affine)	a
x^2 (fonction carré)	$2x$
x^3 (fonction cube)	$3x^2$
x^n (où n est un entier naturel non nul)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$

Exemple.
- Par exemple, si $f(x) = 3$ alors la fonction dérivée de f est $f'(x) = 0$ *[formule 1]*: en effet, si f est une fonction constante, sa droite est horizontale, confondue avec sa tangente, donc la pente ($f'(x)$) sera nulle.
- Si $f(x) = x^4$ alors la fonction dérivée de f est $f'(x) = 4x^3$ *[formule 6]*

Exercice III-1.
(1) Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$.
(2) En déduire $f'(0)$ et $f'(1)$.
(3) Interpréter graphiquement ces deux résultats.
(4) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f (dans le même tableau)
(5) Représenter la courbe représentant la fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

Nous avons absolument besoin de connaître certaines propriétés sur les fonctions dérivées pour pouvoir par exemple calculer $(3x^4)'$, $(x^2+x)'$, $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)'$...
Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables là où elles sont définies (admis).

Si f(x) est égal à	**Alors f '(x) =**
$k\times u(x)$ (où k est un nombre fixé)	$k\times u'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)\times v(x)$	**Attention !** $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{v(x)}$	**Attention !** $-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	**Attention !** $\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Exemple.
- Par exemple, si $f(x)=2x+3+x^2$ alors $f'(x)=(2x+3)'+(x^2)'=2+2x$ (formule 2).
- Si $f(x)=5x^3$ alors $f'(x)=5(x^3)=15x^2$.

Exercices III-2 : calculs de dérivées.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x)=x^3-2x^2+1$, $g(x)=\frac{5x^2-x}{2}$, $h(x)=\frac{2}{x}+x$, $k(x)=\frac{2x+2}{1-3x}$.

IV – Compléments

Le théorème fondamental de ce chapitre lie le signe de la dérivée f' aux variations de la fonction f. Nous allons donc rappeler quelques règles sur le signe des fonctions.

Règle 1.
Un carré est toujours positif.

Règle 2.
Pour a non nul : f(x) = ax + b s'annule toujours en $x=-\frac{b}{a}$ et on a la règle suivante :

x	$+\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		Signe de -a	0	Signe de a	

Remarque.
Pour vous souvenir de ce résultat, rappelez vous que :
- si f(x) = ax + b avec a > 0 alors la fonction est croissante (« la droite monte ») donc elle passe du signe − au signe +.
- si f(x) = ax + b avec a < 0 alors la fonction est décroissante (« la droite descends ») donc elle passe du signe + au signe -.
- Dans les deux cas, elle coupe l'axe des abscisses en x = $-\frac{b}{a}$.

Exercices IV-1.
Soit f la fonction définie sur I = [0 ;5] par $f(x)=-x^3+4x^2-4x$.
1. Dériver la fonction f.
2. Montrer que $f'(x)=(x-2)(2-3x)$.
3. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f.

Définition.
On dira que f admet un <u>extremum local</u> M en a lorsque pour x prés de a,
- M est la valeur minimale ou maximale de f.
- f(a) = M.

Exemple.
Dans l'exercice précédent, à l'aide du tableau de variations on a vu que f admet trois extremums locaux : -44 est le minimum (global) de f atteint en 5, 1 est son maximum (global) atteint en 0 et 2 et $-\frac{5}{27}$ est un minimum local atteint en $\frac{2}{3}$.

Propriété.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f(a) est un extremum local.

En effet, deux cas se présentent :

x		a	
f '(x)	-	0	+
f	↘	f(a)	↗

f(a) est un minimum local.

x		a	
f '(x)	+	0	-
f	↗	f(a)	↘

f(a) est un maximum local.

La définition de nombre dérivé est, rappelons-le, associé à une tangente non verticale à Cf.
Soyons un peu plus précis :

Propriété.
Soit f une fonction dérivable en a sur un intervalle I, représentée par Cf.
Alors l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse a est $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

V – Un exercice d'application

On suppose qu'une entreprise produit (et vends) au maximum 14 yachts dans le mois.
On constate que pour x unités produites et vendues, le bénéfice de l'entreprise est donné par la fonction $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 126$ [exprimé en milliers d'euros].

On cherche à déterminer le nombre d'unités à produire pour que le bénéfice soit maximum.

1. Dériver la fonction B puis vérifier que $B'(x) = x(-3x + 24)$.

2. En déduire le tableau de variations de f sur I.
3. En déduire la production qui maximise le bénéfice.
4. Placer dans votre tableau de variation les valeurs f(4) et f(11) : en déduire les productions rentables pour l'entreprise.

Corrigé Exercice I-1.

1. Le domaine de définition de *f* est l'ensemble de toutes les abscisses x pour lesquelles f(x) est définie. On lit $D_f = [-4;7]$.

2a. Pour déterminer l'image de 5, on place 5 sur l'axe des abscisses, on trace une verticale jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée du point d'intersection.
L'image de 5 par la fonction *f* est -1.

2b. Pour lire les antécédents de 0, on lit les abscisses des points d'intersection de Cf et de l'axe (Ox) : 4 et 7 sont les antécédents de 0.

2c. Les nombres qui ont pour images 5 sont les antécédents de 5 : on trace la droite horizontale d'équation y = 5, puis on lit les abscisses des points d'intersection. Seul -4 a pour image 5.

3. Pour résoudre graphiquement l'équation *f*(*x*) = 2, comme dans le 2c, on cherche les antécédents de 2 : -3, -1 et 3 sont les antécédents de 2.
Pour résoudre l'inéquation *f*(*x*) > 2, on trace la droite horizontale d'équation y = 2, puis on lit les abscisses des points de Cf situés au dessus de le droite : f(x) > 2 pour $x \in]-4;-3[\cup]-1;3[$.

4. Voici le tableau de variation de la fonction *f*.

x	-4		-2		1		5		7
f (x)	5	↘	1	↗	4	↘	-1	↗	0

5. Voici le tableau de signes de la fonction *f*.

x	-4		4		7
f		+	0	-	0

Corrigé exercice I-2.

1. Pour résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x), on lit les abscisses des points d'intersection des deux courbes : f(x) = g(x) pour x = -3 ou x = 2.

2. Pour résoudre graphiquement l'inéquation f(x) ≥ g(x), on lit l'abscisse des points de Cf situés au dessus de Cg : f(x) ≥ g(x) pour $x \in [-3;2]$.

3. Pour dresser le tableau de signe de la fonction f – g, on regarde pour quelles valeurs de x la courbe Cf est au dessus de celle de Cg.
si Cf est au dessus de celle de Cg, f – g ≥ 0
si Cf est en dessous de celle de Cg, f – g ≤ 0

x	-3		2		3
f	0	+	0	-	

4. La valeur maximale de f – g est atteinte quand la distance entre les deux courbes Cf et Cg est la plus grande : cela semble se produire pour x = 0.5 environ.

II – Nombre et fonction dérivée

Corrigé exercice II-1.

1. D'après la définition, f'(-4) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -4. A l'aide de la méthode rappelée en première partie, on lit f'(-4) = 3 (environ). De même, f'(-2) = 0 car la tangente est horizontale et f'(0) = -1.

2. **a.** Une droite est horizontale lorsque son coefficient directeur (sa pente) est nul.
b. Du coups, f'(x) = 0 lorsque la courbe aura une tangente horizontale cad pour x = -2 ou pour x = 2.

3. **a.** Une droite descend-t-elle lorsque son coefficient directeur est négatif.
b. Les solutions de l'inéquation f '(x) < 0 sont donc les abscisses des points pour lesquels la tangente descend, donc quand $x \in]-2;2[$ (quand le courbe descends).

4. De même, les solutions de l'inéquation f '(x) > 0 sont donc les abscisses des points pour lesquels la tangente monte, donc pour $x \in]-5;-2[\cup]2;5[$ (quand le courbe descends).

5. Il semble que lorsque f '<0 alors f décroit et quand f '>0 alors f croît.

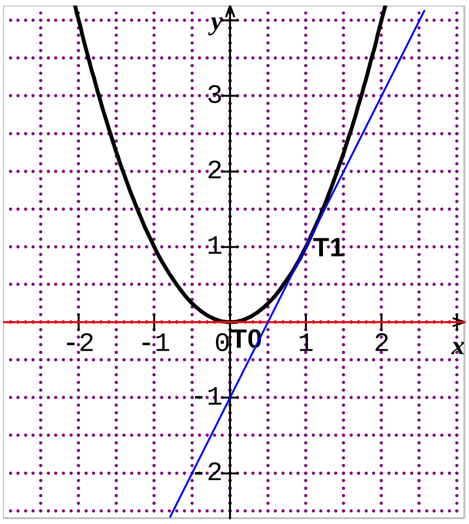
Visiblement, si x est l'abscisse d'un sommet alors f'(x) = 0 puisque la tangente à la courbe en un sommet est horizontale.

III – Formules de référence

Corrigé exercice III-1.
(1) D'après le tableau de dérivée, si f(x) = x² alors la fonction dérivée est f'(x) = 2x.
(2) On a donc f'(0) = 0 et f'(1) = 2.
(3) f'(0) = 0 donc la tangente à la courbe C représentant f est horizontale au point de C d'abscisse 0.
f'(1) = 2 donc la tangente à la courbe C représentant f a un coefficient directeur de 2 au point de C d'abscisse 2.
(4) Dressons le tableau de signe de f' et de variation de f [voir théorème ci-dessus]

x	$+\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = 2x$		-	0	+	
$f(x) = x^2$		↘	$0^2=0$	↗	

(5) On en déduit l'allure de la courbe C [on pourra utiliser un tableau de valeurs]



Corrigé Exercices III-2: calculs de dérivées.

$f(x)=x^3-2x^2+1$ donc $f'(x)=\left(x^3-2x^2+1\right)'=\underbrace{\left(x^3\right)'}_{3x^2}-\underbrace{\left(2x^2\right)'}_{2\times 2x}+\underbrace{(1)'}_{0}=3x^2-4x$

$g(x)=\dfrac{5x^2-x}{2}$ donc $g'(x)=\dfrac{\left(5x^2-x\right)'}{2}=\dfrac{10x-1}{2}$.

$h(x)=\dfrac{2}{x}+x$ donc $h'(x)=2\times\left(\dfrac{1}{x}\right)'+(x)'=\dfrac{-2}{x^2}+1$.

$k(x)=\dfrac{2x+2}{1-3x}$ donc $k'(x)=\dfrac{(2x+2)'(1-3x)-(1-3x)'(2x+2)}{(1-3x)^2}=\dfrac{2(1-3x)-(-3)(2x+2)}{(1-3x)^2}=\dfrac{8}{(1-3x)^2}$.

IV – Compléments

Corrigé exercices IV-1.

Soit f la fonction définie sur I = [0 ;5] par $f(x)=-x^3+4x^2-4x+1$.

1. On a $f'(x)=-3x^2+8x^2-4$

2. On a $(x-2)(2-3x)=2x-3x^2-4+6x=-3x^2+8x-4$ donc on reconnaît bien f′(x).

3. Pour dresser le tableau de signe de f′, on fait apparaître chacun des facteurs de f′(x).

x – 2 = 0 quand x = 2

2 – 3x = 0 quand $x=\dfrac{2}{3}$

On a donc :

x	0		$\frac{2}{3}$		2		5
x - 2		-	|	-	0	+	
2 - **3**x		+	0	-	|	-	
f '(x)		-	0	+	0	-	
f	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	1	↘	-44

Remarquons que sans aucun graphique, nous avons les variations de f, nous savons aussi que 1 est la valeur maximale de f sur I, ou que -44 est sa valeur minimale.

V – Un exercice d'application

Rappelons que x est dans l'intervalle I = [0 ;14].

1. On a $B(x)=-x^3+12x^2-126$ donc $B'(x)=-3x^2+24x$. Par ailleurs $x(-3x+24)=-3x^2+24x=B'(x)$ d'où le résultat.

2. Pour dresser le tableau de variations de f, il nous faut déterminer le signe de la dérivée f′ :

-3x + 24 = 0 quand x = 8.
x = 0 quand x = 0 !

x	0		8		14
x	0	+	|	+	
-3x + 24		+	0	-	
B '(x)		+	0	-	
B	-126	↗	130	↘	-518

3. Il faut donc produit 8 bateaux pour réaliser le bénéfice maximum : il est alors de 130 milliers d'euros.

4.

x	0		4		8		11		14
B	-126	↗	0	↗	130	↘	0	↘	-518

Comme f(4) = f(11) = 0, à l'aide du tableau de variations, on constate que le bénéfice est positif [production rentable] pour une production comprise entre 4 et 11 unités.
Sinon, l'entreprise est déficitaire.
Voici la courbe représentant le bénéfice, qui confirme toutes nos observations…