Droites et Système d'équations

Objectifs

Difficile, en seconde de définir proprement ce qu'est une droite (difficile même en terminale…).
Parmi les réponses souvent proposées par les élèves, on retiendra les plus fréquentes :

- *« c'est un trait rejoignant deux points »* : **non !**

- *« c'est une trait <u>droit</u> passant par deux points [ou plus court chemin] »* : bof, et remarquons que définir la notion de droite en utilisant la notion de « droit » est incohérente.

non !

- *« c'est une trait <u>droit infini</u> passant par deux points »* : il y a du mieux…mais attention aux trous !

non !

- *« c'est une trait <u>droit infini sans trou</u> passant par deux points »* : là on approche du but.
  La notion de trou (ce que l'on appelle la continuité en mathématiques) est en fait primordiale.
  Etant inaccessible en seconde, nous proposerons une autre définition rigoureuse de la notion de droite, à l'aide des vecteurs.

Remarquons aussi que de telles questions qui vous semblent certainement « inutiles » puisque vous pensez savoir ce qu'est une droite ont posé problème pendant de nombreux siècles aux plus grands mathématiciens.
La plus célèbre étant « Soit D une droite donnée, A un point hors de D. Existe-t-il une unique parallèle à D passant par A ? » :
« oui ! » me direz vous. « Ca dépend ! », vous répondrai-je : il existe des géométries dites non euclidiennes, dans lesquelles cette affirmation est fausse, dans lesquelles deux droites parallèles peuvent se croisées… géométries utilisées par exemple en physique, en astronomie… donc loin d'être inutiles !
Ce n'est évidemment pas l'objet du chapitre, mais il faut garder à l'esprit que de telles définitions, qui peuvent sembler parfois théoriques et non intuitives sont importantes et nous permettront de découvrir (voir de comprendre) d'étranges situations dans l'avenir.

Nous verrons tout simplement dans ce chapitre : comment tracer une droite dont on connaît l'équation, comment retrouver son équation à partir du tracé… points qui seront fondamentaux au lycée, et ce quelque soit la section envisagée en première.

Animations liées sur le site [à faire]

- Le droites : deux animations très pratiques pour retrouver une équation de droite et tracer une droite dont on connaît l'équation.
  http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/droite-geop/index.php

- Testez vous ! QCM et exercices sur les fonctions affines et les droites.
  http://mathemitec.free.fr/animations/se-tester/Fonctions_affines/index.php

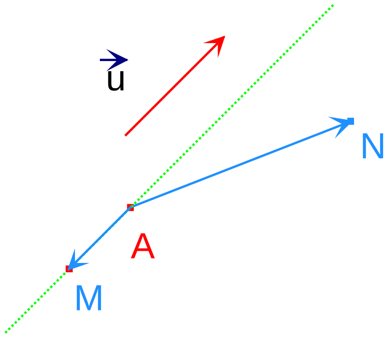
<u>Note</u>
Tous les exercices ou les démonstrations des propriétés de ce chapitre se trouvent à la fin de ce document.

I - Equation cartésienne d'une droite

Nous allons enfin définir proprement la notion de droite ! Ca vous plaira certainement pas, mais ce sera utile pour la suite -)).

Définition.
Soit A un point du plan P et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
On appelle droite **D passant par A, de <u>vecteur directeur</u>** $\vec{u}$**,** l'ensemble de tous les points M du plan P tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
Ainsi, une droite est déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur non nul $\vec{u}$*.*

Exemples.



Si D désigne la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, alors le point M est sur D puisque $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires mais le point N non, puisque $\overrightarrow{AN}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque.

- Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.
- <u>Une droite est donc définie de manière unique par deux points distincts du plan.</u>
  En effet, si A et B sont 2 points distincts du plan, la droite (AB) est la droite qui passe par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ (ou par $\overrightarrow{BA}$, ou qui passe par B…).

Afin de pouvoir parler <u>d'équation de droite</u>, et de se repérer sur le plan, nous nous désignerons par P le plan (cartésien), munit d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ **orthonormé.**

Rappel important.

Lors du chapitre sur les vecteurs, nous avons montré que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ si et seulement si (ssi) leurs cordonnées sont proportionnelles, cad ssi **leur déterminant est nul**.
Rappelons que le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est donné par $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=xy'-yx'$.

<u>Exercice I-1</u>.
Soit $\vec{u}(1;2)$ et $A(-1;3)$, puis D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point de coordonnées $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\det\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)$ en fonction de x et y où M(x ;y).
2. En déduire, à l'aide de la définition de droite, une équation de D.
3. En déduire, sans tracer D, si les points suivants ont-ils sur D : B(1 ;-3) et C(-2 ;7) ?
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de l'axe des abscisses et de D.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de l'axe des ordonnées et de D.
6. Tracer D. *(faire le lien entre graphique et a et b du vecteur directeur).*

L'intérêt de connaître l'équation d'une droite est de traiter par exemple de manière analytique (par le calcul), toutes les questions géométriques.
Cela nous permettra aussi de repérer la droite dans le plan.

Généralisons donc les résultats obtenus dans l'exercice précédent.

Théorème I-2 [à faire]
1. Si D est une droite du plan dirigée par $\vec{u}$ alors elle admet une équation du type
ax + by + c = 0 où a et b sont tels que $\vec{u}(-b;a)$ dirige D, et c est un paramètre à déterminer.
2. Réciproquement, l'ensemble des points M(x ;y) tel que ax + by + c = 0 est une droite dirigée par $\vec{u}(-b;a)$.

Autrement dit :

M(x ;y) est sur la droite D SSI ax + by + c = 0, où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige D :

cette équation est appelée **équation cartésienne de D**.

Remarque.
- Il est capital de noter la dépendance entre les a et b de l'équation et d'un vecteur qui dirige D.
- Notons aussi que toute équation proportionnelle à la précédente est encore une équation cartésienne de D puisque tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ dirigera aussi D.
  Il n'y a donc pas unicité de l'équation cartésienne d'une droite.

Nous allons voir dans la partie suivante, les principales méthodes pour déterminer l'équation d'un droite. Ces méthodes sont à maîtriser.

I-A : Méthodes pour trouver l'équation cartésienne d'une droite

Méthodes.
1. Si on connaît un vecteur directeur et un point de D :
- On applique le théorème I-2 [*voir comment dans l'exo qui suit*]

2. Si on connaît deux points A et B de D :
- On déterminer un vecteur directeur de D, par exemple $\overrightarrow{AB}$.
- On applique le théorème I-2.

Exercice I-4.
Déterminer une équation de la droite D dirigée par $\vec{u}(2;1)$ et qui passe par A(-3 ;2)

Exercice I-5.
Déterminer une équation de la droite qui passe par A(-2 ;1) et B(3 ;4).

Maintenant que nous savons déterminer l'équation d'une droite, il nous reste à la tracer.
Nous présenterons différentes méthodes, plus ou moins rapides, plus ou moins simples.
Il nous restera enfin, à partir du tracé d'une droite, de retrouver son équation.

Rappelons le point essentiel connu de tous : pour tracer une droite, deux points suffisent !
Autrement dit, par deux points il passe une unique droite.

I-B : Méthodes pour tracer une droite dont on connaît une équation

Méthodes.
1. [la plus simple]. On détermine, à l'aide de l'équation de D, deux points qui sont sur D.

2. Ou :
- On détermine un point A de D à l'aide de son équation.
- On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de D à l'aide du théorème I-2.
- A partir du point A placé dans un repère, on tracer le vecteur $\vec{u}$, ce qui nous donne D.

Exercice I-6.
Soit D l'ensemble des points M(x ;y) tels que 3x – 2y + 1 = 0. Tracer D à l'aide de la méthode 1.

Exercice I-7.
Soit D l'ensemble des points M(x ;y) tels que -2x + y -2 = 0. Tracer D à l'aide de la méthode 2.

Etudions maintenant le cas de droites particulières : les verticales ou les horizontales.

I-C : Droites verticales ou horizontales

C'est encore le théorème I-2 qui nous permettra de conclure…

- Une droite verticale est dirigée par un vecteur directeur du type $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$, où B est non nul.

  Le théorème I-2 permet donc de dire qu'une droite verticale a une équation du type :

  -Bx + 0y + c = 0 ,c'est-à-dire $x = \frac{c}{B} = \text{constante}$.

  On retiendra le résultat suivant :

Toute droite verticale admet une équation du type x = constante, et réciproquement.

- Une droite horizontale est dirigée par un vecteur directeur du type $\vec{u}\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$, où A est non nul.

  Le théorème I-2 permet donc de dire qu'une droite horizontale a une équation du type :

  0x + Ay + c = 0 ,c'est-à-dire $y = -\frac{c}{A} = \text{constante}$.

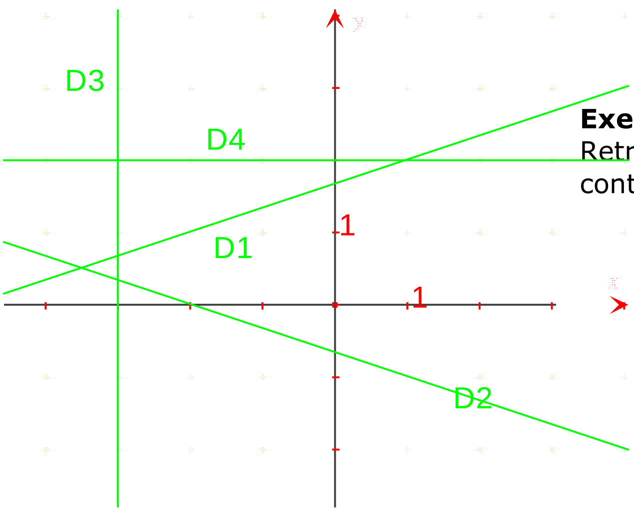
  On retiendra le résultat suivant :

Toute droite horizontale admet une équation du type y = constante, et réciproquement.

Les équations cartésiennes sont un type d'équation. Ce n'est pas le plus utilisé, au collège et même au lycée.

I-D : Retrouver graphiquement une équation cartésienne

Méthodes.
On cherche donc a, b et c tels que ax + by + c = 0.
- On détermine graphiquement un vecteur directeur $\vec{u}$ de D [donc on trouve a et b]
- On lit les coordonnées d'un point de D, sur le quadrillage et on les remplace dans l'équation ax + by + c = 0 pour trouver c.



Exercice I-8.
Retrouver une équation cartésienne des droites ci-contre.

II - Equation réduite d'une droite

C'est toute bête ! Pour trouver une équation réduite de droite, il va suffire d'isoler le y dans l'équation cartésienne…

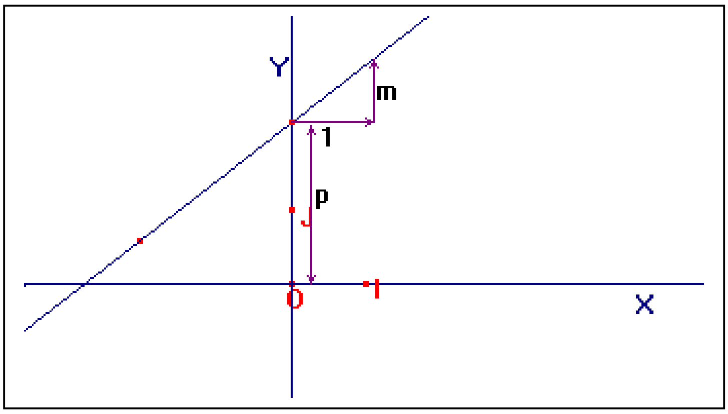
Théorème II-1 [corrigé]

- Toute droite non verticale du plan admet une équation du type y = mx + p : on l'appelle **équation réduite de D**. De plus, $\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de D.
- Réciproquement, les points M(x,y) tels que y = mx + p décrivent une droite dirigée par $\vec{u}(1;m)$.

Définition.

- m est appelé le **coefficient directeur** ou **pente** de D.
- p est appelée **ordonnée à l'origine** de D, cad l'ordonnée du point d'intersection de D et de (Oy).

On retiendra le schéma suivant :



Remarque.
P étant l'ordonnée à l'origine, la droite passe par l'origine SSI p = 0.

Exemple.
Soit D la droite d'équation cartésienne 3x − 2y +1 = 0. Alors 2y = 3x + 1 donc l'équation réduite de D est $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Remarques.

- L'équation réduite d'une droite est unique.
- Si sa pente m = 0, alors D est horizontale.
- Si sa pente m < 0, alors elle descend.
- Si sa pente m > 0, alors elle monte.
- Une droite verticale représente toujours une fonction (affine) f(x) = mx+p.

II-B : Méthodes pour tracer une droite dont on connaît l'équation réduite

Méthodes.
1. [le plus simple]. On détermine, à l'aide de l'équation de D, deux points qui sont sur D.

2. Ou :
- On détermine un point A de D à l'aide de son équation.
- On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de D à l'aide du théorème II-1.
- A partir du point A placé dans un repère, on tracer le vecteur $\vec{u}$, ce qui nous donne D.

De part sa simplicité, nous utiliserons principalement la méthode 1 ci-dessus.
La seconde méthode aura plus tard son intérêt…

Exercice II-2.

Tracer les droites D et D' d'équation réduite D : y= -3x+2 et $D': y=-\frac{2}{3}x-2$.

II-C : Méthodes pour trouver l'équation réduite d'une droite

Méthodes.
1. Si on connaît un vecteur directeur et un point de D :
- On applique le théorème II-1 [*voir comment dans l'exo qui suit*]

2. Si on connaît deux points A et B de D :
- *On détermine un vecteur directeur de D, par exemple $\overrightarrow{AB}$.*
- *On applique le théorème II-1.*

  OU
- On détermine le coefficient directeur de (AB).
- On calcule ensuite l'ordonnée à l'origine p.

Rappelons **la propriété fondamentale** vue au collège :

Propriété.
Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ n'ont pas la même abscisse, alors la droite (AB) a pour coefficient directeur $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Il faut comprendre cette propriété… La droite (AB) est évidemment dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$. Comme $x_B-x_A\neq 0$, on peut diviser par x_B-x_A de sorte que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \end{pmatrix}$, qui est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ dirige aussi D.

Comme il est de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ est le coefficient directeur de la droite.

Voilà.

Dans les exercices suivants, vous choisirez la méthode qui vous convient le mieux, même si je vous conseille de comprendre celle que je présenterai…

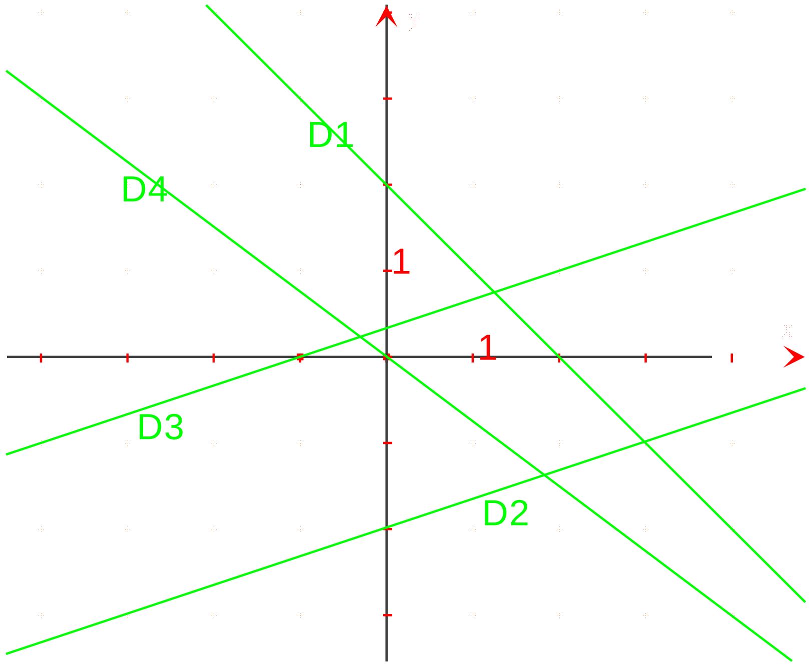
Exercice II-3.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) qui passe par A(-2 ;1) et B(2 ;3).

2. Déterminer l'équation réduite de la droite D qui passe par C(2 ;1) et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice II-4.

Déterminer l'équation réduites des droites suivantes.



Remarque utile. Graphiquement si $\vec{u}(a;b)$ dirige D alors son coefficient directeur est $m=\dfrac{b}{a}$.

III – Systèmes linéaires 2 équations – 2 inconnus

III-A Positions relatives de droites

Rappelons qu'on dit que deux droites du plan sont parallèles lorsque :

- elles sont confondues [elles ont alors une infinité de point d'intersection] *ou*
- elles n'ont aucun point d'intersection.

Il est aussi utile de rappeler que deux **droites non parallèles** se coupent en **un unique point d'intersection**.

Nous allons donc chercher à savoir quand, à partir de leurs équations, on peut dire que deux droites sont parallèles puis, lorsqu'elles ne le sont pas, qu'elles sont les coordonnées des points d'intersection.

Remarquons tout de suite par unicité de l'équation réduite d'une droite que :

Théorème. Deux droites D et D' sont confondues ssi elles ont la même équation réduite.

Il est clair que deux droites D et D' sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc ssi m = m'.

Théorème.
Deux droites D et D' sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur.

Exercice III-1.
Soit D : y = 0.5x + 2 et (AB) avec A(-2 ;1) et B(3 ;4). Ces droites sont-elles parallèles ?

III-B Exemple de résolution d'un système.

Pour déterminer les coordonnées d'un point d'intersection de deux droites, nous allons résoudre ce qu'on appelle un système.

Dans l'exemple précédent, on a D : y = 0.5x + 2 et on vérifie que (AB) : $y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$.

Comme le point d'intersection I est sur D1 et D2, ses coordonnées vérifient les deux équations de droite : $\begin{cases} y=0.5x+2 \\ y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5} \end{cases}$.

Il existe plusieurs méthodes pour trouver x et y, cad résoudre le système : nous allons ici faire la méthode de substitution :

$\begin{cases} y=0.5x+2 \\ y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5} \end{cases}$ donc $\frac{1}{2}x+2=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{10}x=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x=-2$.

Remplaçons maintenant cette valeur de x **dans une des deux équations** (la plus simple) :
il vient y = 0.5(-2)+2 = 1.
Ainsi, I(-2 ;1) est le point d'intersection des deux droites.
Evidemment, lorsque le temps le permet, il est fortement conseillé de :
> vérifier que ces coordonnées satisfont aussi la seconde équation (sinon on a fait une erreur de calcul).
> vérifier la cohérence avec la lecture graphique.

III-C Résolution d'un système : cas général

Démarche.

1. Tenter une résolution graphique, pour vérifier la cohérence avec les calculs.
2. Appliquer la méthode de combinaison linéaire, *ou une autre…*

Fixons le cadre de travail ainsi que quelque résultats généraux.

Définition.
Un système *linéaire* (S) de deux équations **à deux inconnues x et y** est de la forme

$(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Dire qu'un couple (x ;y) est solution de ce système signifie que (x ;y) est solution des 2 équations ax + by = c **ET** a'x + b'y = c'.

Remarque.
Comme nous venons de le voir, un système peut s'interpréter comme la recherche du point d'intersection de deux droites.
La présentation de (S) fait référence à leurs équations cartésiennes.

Théorème.
Soit (S) un système *linéaire* de deux équations à deux inconnues x et y de la forme
$(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.
1. (S) admet une unique solution ssi ab' – ba' est non nul : le nombre ab' – ba' est appelé **déterminant du système** [droites non parallèles].

2. Dans le cas contraire, le système :
> n'admet aucune solution [droites parallèles distinctes]
> admet une infinité de solution [droites confondues]
Dire qu'un couple (x ;y) est solution de ce système signifie que (x ;y) est solution des 2 équations ax + by = c **ET** a'x + b'y = c'.

Exemple.
Le système $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+4y=-3 \end{cases}$ admet une unique solution puisque son déterminant $3\times4-2\times(-2)=16$ est non nul.

Explications.

<u>Si le déterminant est nul,</u> cela signifie que les 2 droites sont parallèles, donc de vecteurs directeurs colinéaires donc de déterminant nul !
Géométriquement : soit elles sont confondues, soit elles sont distinctes.
Ainsi, lorsque le déterminant est nul soit il en existe une infinité (ceux de la droite), soit il n'existe aucune solution.
> nous verrons des exemples.

<u>Si le déterminant est différent de 0</u>, leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires donc les droites sont non parallèles donc sécantes : il ainsi existe un unique point d'intersection donc une **unique solution au système**.
> nous allons voir comment résoudre le système

III-D Méthode de Résolution

Revenons à l'exemple précédent : $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+4y=-3 \end{cases}$ qui admet une unique solution.

La méthode de combinaison linéaire consiste à faire une combinaison des lignes pour faire disparaître une inconnue.

- Multiplions L1 (ligne 1) par 2, et L2 (ligne 2) par 3 : (S) devient $\begin{cases} 6x-4y=2 \\ 6x+12y=-9 \end{cases}$.
- Comme il y 6x dans les deux équations, faisons par exemple L2 – L1.
  Il vient 16y = - 11 donc $y=-\frac{11}{16}$.

- Remplaçons maintenant cette valeur de y dans une des deux équations, par exemple L1 (la première) : $3x-2\left(-\frac{11}{16}\right)=1 \Leftrightarrow 3x=1-\frac{11}{8}=-\frac{3}{8} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$.

Ainsi, (S) admet comme unique solution $\left(-\frac{1}{8};-\frac{11}{16}\right)$.

Exercice III-2.

Déterminer, si elles existent, les solutions des systèmes suivants :

$(S1):\begin{cases}x+y=2\\x-3y=6\end{cases}$ $(S2):\begin{cases}-3x+4y=0\\x-3y=6\end{cases}$ $(S3):\begin{cases}-2x+6y=-12\\x-3y=6\end{cases}$

Exercice III-3.

Dans un repère orthonormé, placer les points A(3 ;5) , B(-1 ;2) et C(1 ;1).

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Soit D : y = 2x +4.
   Démontrer que D // (AC) et que le point B est sur D.
3. Donner une équation de la droite D' passant par A et parallèle à (BC)
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection E de D et de D'.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ACBE ? Justifier.
6. Calculer les coordonnées du centre K de ce quadrilatère.

Exercice III-4.

Une séance de cinéma a attiré 115 personnes. Le tarif normal est de 7€ et le tarif réduit de 4,50€.

Sachant que la recette à cette séance a été de 680€, déterminer le nombre de personnes ayant payé au tarif normal et celui ayant payé au tarif réduit.

CORRIGE DES THEOREME ET EXERCICES

I - Equation cartésienne d'une droite

Corrigé Exercice I-1.

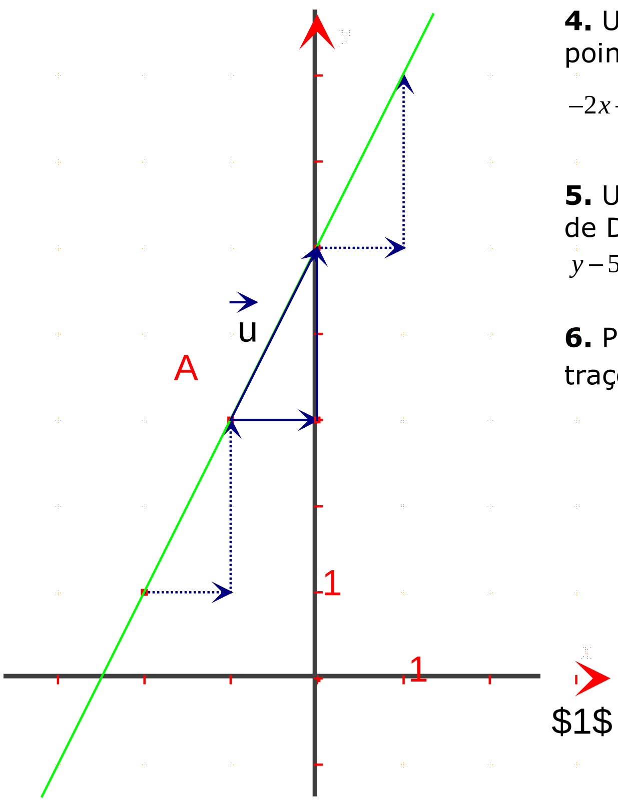
Soit $\vec{u}(1;2)$ et $A(-1;3)$, puis D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point de coordonnées $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. On a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$: d'après le rappel, $\det\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=1\times(y-3)-2(x+1)=y-2x-5$.

2. Par définition M est sur D ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc ssi **leur déterminant est nul**. Ainsi, M(x ;y) est sur D ssi y – 2x – 5 = 0 : ont dit que c'est une équation de D.

3. B(1 ;-3) si ses coordonnées vérifient l'équation précédente : or $y_B - 2x_B - 5=1-2(-3)-5=2$ qui est non nul, donc $B\notin D$.
De même, pour C(-2 ;7), $y_C - 2x_C - 5=7-2(1)-5=0$ donc $C\in D$.



4. Un point de (Ox) à son ordonnée nulle : y=0, un point de D vérifie y – 2x – 5 = 0 : on a donc $-2x-5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$. Ainsi $I\left(-\frac{5}{2};0\right)\in D\cap(Ox)$.

5. Un point de (Oy) à son abscisse nulle : x=0, un point de D vérifie y – 2x – 5 = 0 : on a donc $y-5=0 \Leftrightarrow y=5$. Ainsi $J(0;5)\in D\cap(Oy)$.

6. Pour tracer D, plaçons A puis à partir de l'origine A, traçons $\vec{u}$.

Démonstration Théorème I-2.

Il s'agit principalement de reprendre de manière théorique l'exercice I-1.
Nous allons traiter les deux implications simultanément.

Soit donc D la droite passant par $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}(A;B)$.

Nous avons déjà remarqué que $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0$ où $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ donc

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow A(y-y_A)-B(x-x_A)=0 \Leftrightarrow -Bx+Ay+\underbrace{(Bx_A-Ay_A)}_{c}=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec a = -B, b = A et c définit comme ci-dessus.

I-A : Méthodes pour trouver l'équation cartésienne d'une droite

Corrigé Exercice I-4.

- D'après le théorème, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc une équation de D est du type 1x – 2y + c = 0.
- Comme A(-2 ;1) est sur D, ses coordonnées vérifient l'équation précédente : on a –3 –2(2) + c = 0 donc c = 7.
- D a donc pour équation x – 2y + 7 = 0.

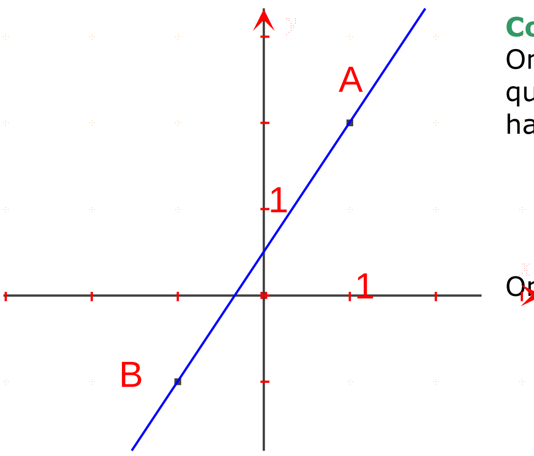
Corrigé Exercice I-5.

Soit D la droite (AB).

- D est bien entendue dirigée par $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et elle passe par A.

  On en revient donc à la première méthode !
- Son équation est du type 3x – 5y + c = 0, et comme A(-2 ;1) est sur D (on aurait pu choisir B), ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.
  3(-2)-5(1)+c=0 donc c = 11.
- Ainsi D : 3x-5y+11 = 0.

I-B : Méthodes pour tracer une droite dont on connaît une équation

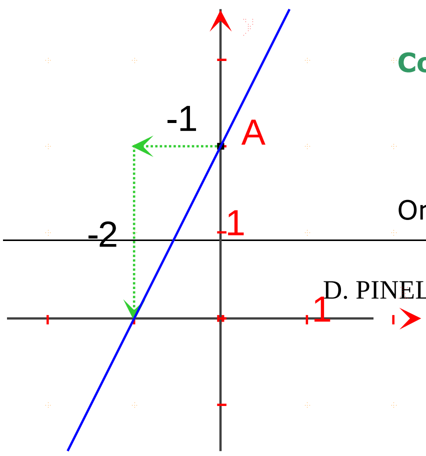


Corrigé exercice I-6.

On a D : 3x – 2y + 1 = 0. Pour déterminer deux points quelconques de D, il suffit de fixer deux valeurs de x au hasard (ou de y) et de déterminer y (ou x).

- Pour x = 1 : 3 – 2y + 1 = 0 donc 2y = 4 et y = 2 : A(1 ;2) est sur D.
- Pour x = -1 : -3 –2y + 1 = 0 donc –2 –2y = 0 donc y = -1 : B(-1 ;-1) est sur D.

On trace alors facilement D.

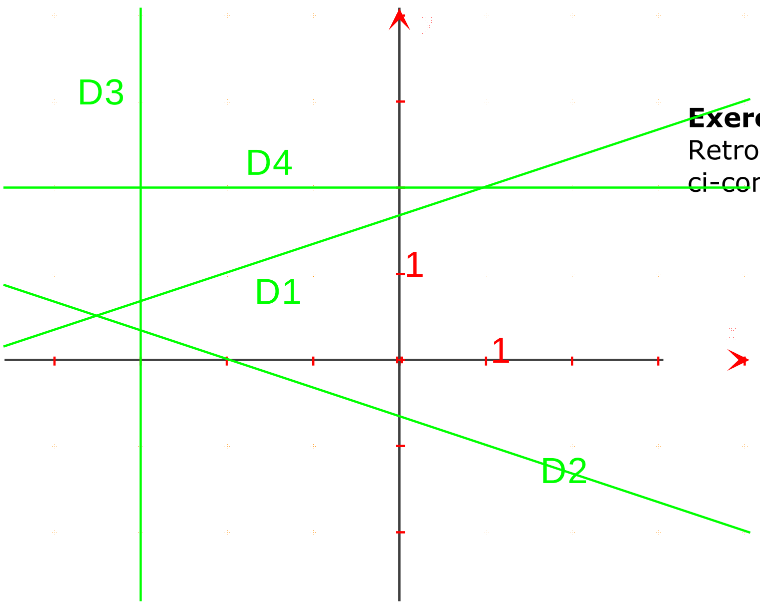


Correction exercice I-7.

- Pour x = 0 : y-2 = 0 donc y=2 et A(0 ;2) est sur D.
- D'après le théorème, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige D donc ici $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

On trace alors facilement D.

I-C : Droites verticales ou horizontales



Exercice I-8.
Retrouver une équation cartésienne des droites ci-contre.

Corrigé Exercice I-8.

Pour D1 :

- on lit que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ dirige D1 dons son équation est du type x-3y+c = 0.
- Le point de coordonnées (1 ;2) est sur D1 donc 1-3(2)+c = 0 cad c = 5.
- Ainsi, D1 : x-3y+5 = 0.

Pour D2 :

- on lit que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ dirige D2 dons son équation est du type -x-3y+c = 0.
- Le point de coordonnées (0 ;-2) est sur D2 donc -3(-2)+c = 0 cad c = -6.
- Ainsi, D2 : -x-3y-6 = 0 ou encore x+3y+6=0 quitte à tout multiplier par −1.

Pour D3 :

- D3 est verticale donc son équation est du type x = k.
- Elle passe par A(-3 ;0) donc D3 : x = -3.

Pour D4 :

- D3 est horizontale donc son équation est du type y = k.
- Elle passe par A(O ;2) donc D4 : y = 2.

II - Equation réduite d'une droite

Démonstration théorème II-1.

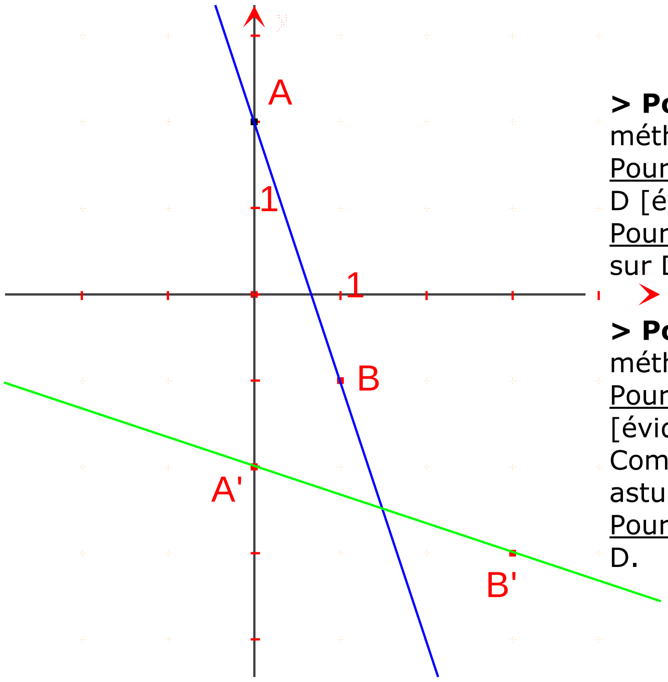
Facile ! Une droite admet une équation cartésienne du type ax + by + c = 0 où $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige D.

Comme D est non verticale, <u>b est non nul</u> et on en déduit que $ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, qui est bien de la forme y = mx + p avec $m=-\frac{a}{b}$.

De plus, comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige D, le vecteur colinéaire $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ le dirige aussi [on a multiplié ses coordonnées par $-\frac{1}{b}$]

II-B : Méthodes pour tracer une droite dont on connaît l'équation réduite

Corrigé exercice II-2.



> Pour D : cherchons deux points de D avec la méthode traditionnelle.
<u>Pour x = 0</u> : y = -3×0 + 2 = 2 donc A(0 ;2) est sur D [évidemment 2 est ordonnée à l'origine].
<u>Pour x = 1</u> : y = -3×1 + 2 = -1 donc B(1 ;-1) est sur D.

> Pour D' : cherchons deux points de D avec la méthode traditionnelle.
<u>Pour x = 0</u> : y = -2 donc A'(0 ;-2) est sur D [évidemment -2 est ordonnée à l'origine].
Comme m n'est pas entier, choisissons une valeur astucieuse de x…
<u>Pour x = 3</u> : y = -2 - 2 = -4 donc B'(3 ;-4) est sur D.

II-C : Méthodes pour trouver l'équation réduite d'une droite

Corrigé II-3.

1.

- le coefficient directeur de (AB) est donné par $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-(-2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc l'équation de D est du type $y=\frac{1}{2}x+p$.
- Comme A(-2 ;1) est sur (AB), ses coordonnées vérifient l'équation : $1=\frac{1}{2}(-2)+p \Leftrightarrow p=2$.
- Ainsi, (AB) : $y=\frac{1}{2}x+2$.

2.

- D est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ donc aussi par $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

  L'équation de D est donc du type $y=\frac{3}{2}x+p$.
- Comme C(2 ;1) est sur D, ses coordonnées vérifient l'équation : $1=\frac{3}{2}(2)+p \Leftrightarrow p=-2$.
- Ainsi, D : $y=\frac{3}{2}x-2$.

Corrigé exercice II-4.

Pour D1 :

- On lit que l'ordonnée à l'origine est p = 2 donc D1 : y = mx + 2.
- On lit que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dirige D1 donc m = -1.
- Ainsi, D1 : y = -x + 2.

Pour D2 :

- On lit que l'ordonnée à l'origine est p = -2 donc D1 : y = mx - 2.
- On lit que $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ dirige D2 donc m $=\frac{1}{3}$.
- Ainsi, D2 : y = $\frac{1}{3}$x - 2.

Pour D3 :

- On lit que $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ dirige D3 donc m $=\frac{1}{3}$.
- On lit que A(-1 ;0) est sur D donc $0=\frac{1}{3}(-1)+p \Leftrightarrow p=\frac{1}{3}$.
- Ainsi, D3 : y = $\frac{1}{3}$x + $\frac{1}{3}$.

Pour D4 :

- D4 passe par l'origine donc p = 0 et D4 : y = mx.
- On lit que $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ dirige D4 donc m $=-\frac{3}{4}$.
- Ainsi, D : y = $-\frac{3}{4}$x.

III – Systèmes linéaires 2 équations – 2 inconnus

III-A Positions relatives de droites

Corrigé exercice III-1.

- Le coefficient directeur de D est 0.5.
- Celui de (AB) est $m=\frac{4-1}{3-(-2)}=\frac{3}{5}$.

Non, ces droites ne sont pas parallèles.

Mais comment déterminer leur point d'intersection…. ? ? ?

III-D Méthode de Résolution

Corrigé exercice III-2 [non rédigé].

$$(S1):\begin{cases}x+y=2\\x-3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\;[L_1]\\-4y=4\;[L_2-L_1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

$$(S2):\begin{cases}-3x+4y=0\\x-3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+4y=0\\3x-27y=18\ [3L_2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+4y=0\\-23y=18\ [L_2+L_1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+4\left(-\dfrac{18}{23}\right)=0\\y=-\dfrac{18}{23}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{24}{23}\\y=-\dfrac{18}{23}\end{cases}$$

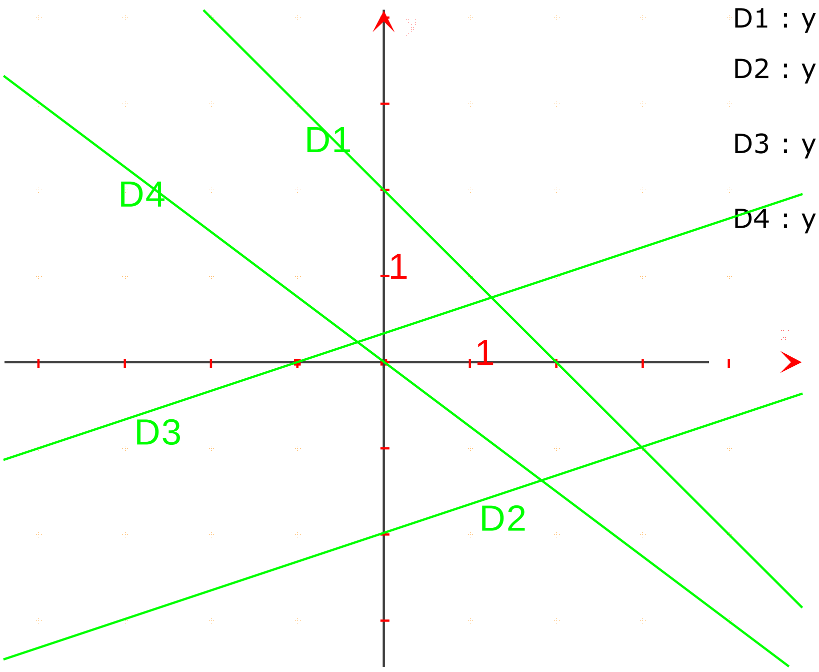
$(S3):\begin{cases}-2x+6y=2\\x-3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+6y=2\\2x-6y=12\ [2L_2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+6y=2\\0=14\ [L_2+L_1]\end{cases}$: c'est donc impossible, ce système n'a aucune solution.

Interprétation.

(S1) correspond à l'intersection de D1 : y = -x + 2 et D2 : y = $\frac{1}{3}$x - 2.

(S2) correspond à l'intersection de D4 : y = $-\frac{3}{4}$x et D2 : y = $\frac{1}{3}$x - 2.

(S3) correspond à « l'intersection » de D3 : y = $\frac{1}{3}$x + $\frac{1}{3}$. et D2 : y = $\frac{1}{3}$x - 2.

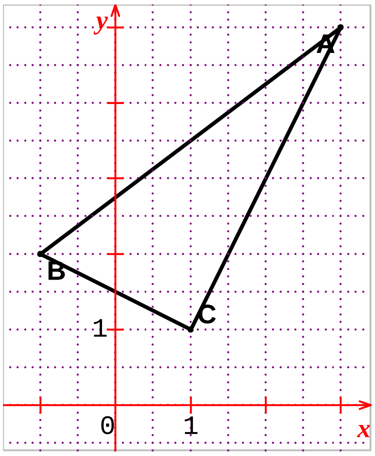


D1 : y = -x + 2.

D2 : y = $\frac{1}{3}$x - 2.

D3 : y = $\frac{1}{3}$x + $\frac{1}{3}$.

D4 : y = $-\frac{3}{4}$x.



Corrigé Exercice III-3.

Dans un repère orthonormé, placer les points A(3 ;5) , B(-1 ;2) et C(1 ;1).

1. Prouvons que ABC est rectangle en C :
   $AB^2=(-1-3)^2+(2-5)^2=25$, $AC^2=(1-3)^2+(1-5)^2=20$ et $BC^2=(1+1)^2+(1-2)^2=5$.
   Ainsi AC² + BC² = AB² et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en C.

2. → (AC) , qui est non verticale, a pour coefficient directeur

$m=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

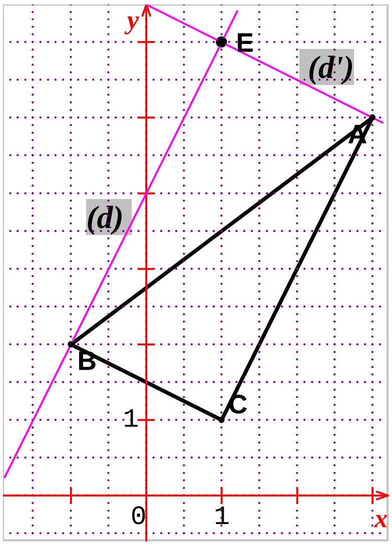
Comme $\boxed{D : y = 2x + 4}$, les deux coefficients directeurs sont égaux donc les droites sont parallèles

De plus les coordonnées de B vérifient l'équation de D donc ce point est sur la droite B.

3. → D' est parallèle à (BC) (non verticale) donc elle a même coefficient directeur. Or $m_{(BC)}=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=-\dfrac{1}{2}$ donc D' : $y=-\dfrac{1}{2}x+p$..

De plus le point A(3 ;5) est sur la droite D' donc $5=-\dfrac{1}{2}\times 3+p \Leftrightarrow p=\dfrac{13}{2}$ et on a

$\boxed{D': y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}}$.



4. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2} \end{cases}$.

Aidons nous du graphique pour changer de méthode : il semble que E(1 ;6).

Comme les droites D et D' ne sont pas parallèles, elles admettent un unique point d'intersection et le système admet une unique solution.

Si (x = 1, y = 6) est solution, par unicité, ce sera la seule !!

Vérifions : <u>pour x = 1</u> : 2x + 4 = 6 donc E est sur D.

<u>pour x = 1</u> : $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}=\dfrac{12}{2}$ = 6 donc E est sur D' !

→Le point cherché est donc E(1 ;6).

5. Le quadrilatère ACBE est un rectangle : en effet (AE)//(BC) et (BE)//(AC) par construction donc c'est un parallélogramme.
Enfin, (AC) et (BC) sont perpendiculaires d'après la question 1.

Comme dans tout parallélogramme, le centre K est le milieu d'une diagonale, [AB] par exemple.

Donc $K\left(\dfrac{3-1}{2};\dfrac{5+2}{2}\right)$ cad K(1 ;3.5) : cela correspond d'ailleurs à la lecture graphique.

Corrigé exercice III-4.

Notons *x* le nombre de personnes ayant payé au tarif normal et *y* le nombre ayant payé au tarif réduit :

- 115 personnes sont allés au cinéma donc $x+y=115$.
- Le tarif normal est de 7€ donc la recette associée est de $7x$: de même la recette associée au tarif réduit est de $4,5y$: comme la recette totale est 680€, on a : $7x+4.5y=680$.
- On doit donc résoudre le système $\begin{cases} x+y=115 \quad (\times 7) \\ 7x+4.5y=680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+7y=805 \\ 7x+4.5y=680 \end{cases}$.

$(L_1)-(L_2)$: $2,5y=125 \Leftrightarrow y=50$.

On remplace cette valeur de y dans $x + y = 115$: il vient $x = 65$.
Par conséquent 65 personnes ont payé au tarif normal, 50 ont payé au tarif réduit.