La fonction logarithme népérien,
$f(x) = \ln(x)$.

L'étude des fonctions est une notion fondamentale du programme de Terminale STG.
A l'heure actuelle, les fonctions rencontrées sont celles connues depuis la seconde : fonction carré, racine, quotient de deux fonctions, somme de fonctions puissances…

Nous allons dans ce chapitre définir une nouvelle fonction, la fonction logarithme.
Nous admettrons son existence et vérifierons certaines de ces (nombreuses) propriétés.
Comme pour les fonctions de référence, nous apprendrons à dériver les fonctions logarithme et, plus généralement, à mener une étude complète de telle fonction.

Initialement créée pour faire des changement d'unité (lorsque les valeurs considérées sont très grandes, le logarithme permet de réduire ces valeurs), nous verrons aussi comment la fonction ln permet de transformer des multiplications en addition ou des puissances en produit.

Note
Tous les corrigés des exercices de ce chapitre se trouvent à la fin de ce document.

I – Une définition de la fonction logarithme

Posons nous avant tout quelques petites questions…
Normalement, on sait dériver quasiment toutes les fonctions, essayons de réflechir au processus inverse (cela s'appelle trouver des primitives ou intégrer).

- Quelle fonction a pour dérivée 1 ?
  D'après le tableau de dérivation, on sait que $(x)'=1$. Autrement dit, la foncition $f(x)=x$ est une solution de l'équation $f'(x)=1$.
  Remarquons que comme la dérivée d'une constante est 0, toutes les fonctions du type $f(x)=x+b$ sont des solutions de $f'(x)=1$.
- Quelle fonction a pour dérivée x ?
  D'après le tableau de dérivation, on sait que $(x^2)'=2x$ donc $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$ Autrement dit, la fonction $f(x)=\frac{x^2}{2}$ est une solution de l'équation $f'(x)=x$.
  De même que précédemment, toutes les fonctions du type $f(x)=\frac{x^2}{2}+b$ sont des solutions de $f'(x)=x$.
- Quelle fonction a pour dérivée x^2 ?
  D'après le tableau de dérivation, on sait que $(x^3)'=3x$ donc $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ Autrement dit, la fonction $f(x)=\frac{x^3}{3}$ est une solution de l'équation $f'(x)=x^2$.
  On remarque encore que toutes les fonctions du type $f(x)=\frac{x^3}{3}+b$ sont des solutions de $f'(x)=x^2$.
- …
- On remarque donc qu'à l'aide du tableau de dérivée, on peut répondre à ce type de question, même pour les fonctions du type $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}\ldots$.
  Par contre, on bloque étrangement sur la recherche d'une fonction f telle que $f'(x)=\frac{1}{x}$.

C'est normal, aussi on admet le théorème suivant.

Théorème.
On admet qu'il existe une unique fonction, appellée logarithme népérien et notée ln telle que :
> ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
> $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$
> ln(1) = 0

Vous démontrerez la propriété suivante en exercice :

Propriété I-1 (voir corrigé fin de chapitre).

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout réels a et b positifs, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Conséquences.

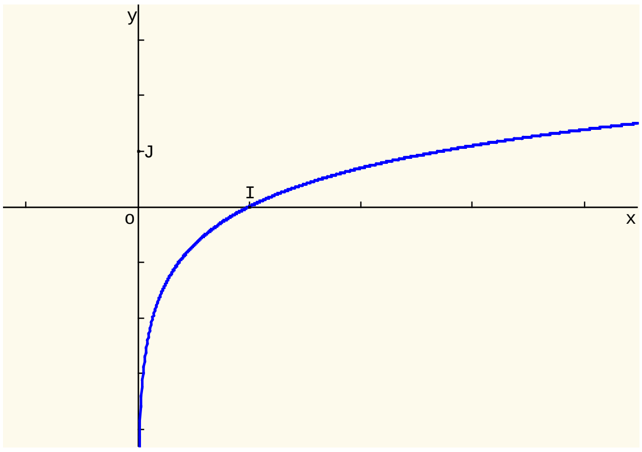
- La fonction ln étant dérivable et strictement croissante, on a $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
- En particulier $\ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Remarquons que la première conséquence est fausse, de manière générale, pour les fonctions non monotones.
Par exemple, si $f(x) = x^2$, $f(a) = f(b) \not\Rightarrow a = b$. Pour s'en convaincre, prendre a = -2 et b = 2.

Vous démontrerez la propriété suivante en exercice :

Propriété I-2 (voir corrigé fin de chapitre).
On a $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$ et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Voici la courbe représentative de la fonction logarithme népérien (à connaître !)



Vous pouvez utiliser **la touche ln** de votre calculatrice (et pas log, c'est pas tout à fait pareil), pour obtenir la représentationgraphique de ln.

Exercice I-3.
Soit $f(x) = 0,5x^2 - \ln(x)$ définie sur $I =]0;+\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

2. En déduire les variations de f sur I.

II – Propriétés de la fonction ln

On admet la propriété fondamentale suivante :

Propriété.
Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
Le ln transforme le produit en somme.

Par exemple, $\ln(20) = \ln(4) + \ln(5) = \ln(10) + \ln(2)$...

A l'aide de cette propriété, cous pouvez vous entrainer à démontrer chaune des propriétés suivantes :

Propriété II-1 (voir corrigé fin de chapitre).
> Pour tout a > 0, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

> Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Ln et puissances

Comme $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, on obtient assez facilement :

> $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$

> $\ln(a^3) = \ln(a \times a^2) = \ln(a) + \ln(a^2) = \ln(a) + 2\ln(a) = 3\ln(a)$

...
En poursuivant ce processus, on obtient plus généralement :

Propriété.
> Pour tout réel a > 0, pour **tout entier relatif n**, on a $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

En particulier, $\ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -n\ln(a)$

> Comme on a $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, on admet que $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemples.
$\ln(49) = \ln(7^2) = 2\ln(7)$, $\ln(1000) = \ln(10^3) = 3\ln(10)$, si x > 0, $\ln(x) + \ln(4) = \ln(4x)$ ...

Indications pour les exercices II-2 et II-3.

- Bien etudier le domaine de définition des équations avant de commencer.
- Utiliser ensuite la propriété I-1 ou $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ en remarquant que ln(1) = 0.

Exercices II-2.
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x-4) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2-3x) > 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x+3) \leq 0$.

Exercices II-3.
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x) - \ln(4) = \ln(x-4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) = \ln(16)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(6x-3) \geq 3\ln(2)$.

III – Règles importantes de dérivation

Le point de départ de la majorité des études de fonction (type Bac) est la règle de dérivation suivante (admise) :

Théorème.
> Pour tous réels a et b, la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$ est dérivable là où $ax+b>0$, et on a :
$(\ln(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b}$.
> Plus généralement : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur I. Alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemples.

- Si $f(x)=\ln(2x-3)$, f est dérivable pour $x>\dfrac{3}{2}$ et on a $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}$.
- Si $f(x)=5\ln(2-3x)$, f est dérivable pour $x<\dfrac{2}{3}$ et on a $f'(x)=5\times\dfrac{-3}{2-3x}=\dfrac{-15}{2-3x}$.

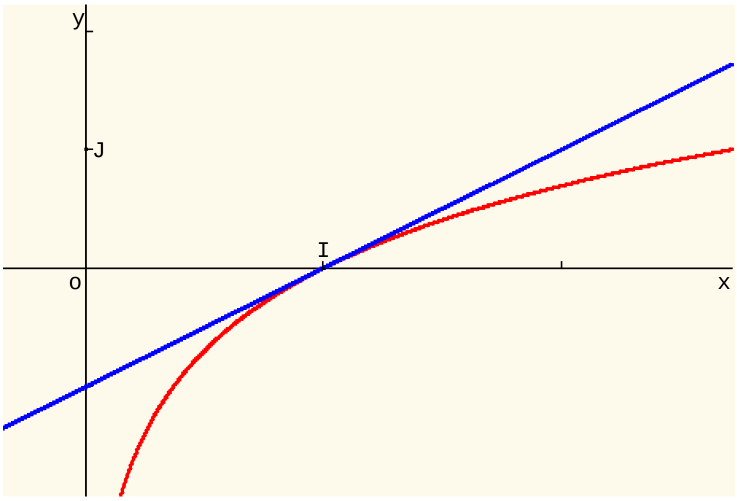
Muni de ce théorème, nous pouvons aborder sereinement la plupart des exercices (même type Bac)…

Il nous manque cependant deux points utiles, dont un capital :
- rappeler l'équation d'une tangente, ça peut toujours servir..
- **apprendre à résoudre les équations (simple) du type ln(x) = k** : nous aurons alors besoin d'introduire encore une nouvelle fonction, la fonction exponentielle.
Nous allons présenter rapidement dans ce chapitre la méthode de résolution de telles équations, un chapitre entier traitera plus tard de la fonction exponentielle.

Tangente.

Rappel.
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, avec a appartenant à I alors la courbe C représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation
$$y=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Exemple.

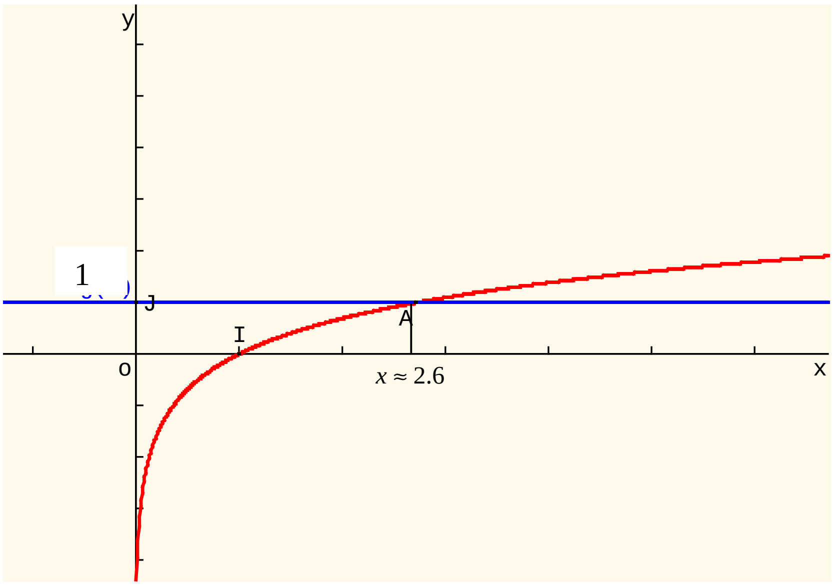


En particulier, la courbe représentant la fonction logarithme admet un tangente T au point d'abscisse 1 d'équation
$y=f(1)+f'(1)(x-1)$ où $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=\dfrac{1}{1}=1 \end{cases}$.

Ainsi T : $y=x-1$.

Equation d'inconnue x du type ln(x) = k, où k réel.

- Remarquons tout d'abord que la simple équation ln(x) = 1, avec les outils actuels, nous est encore inaccessible.
  Graphiquement, nous sommes cependant capable de déterminer une valeur approchée de la solution. On lit que ln(x) = 1 pour $x \approx 2.6$.



- Pour déterminer la valeur exacte de cette équation, nous allons être obligé d'introduire une nouvelle fonction, la fonction exponentielle.

Théorème.

- L'équation ln(x) = 1 admet une unique solution, notée e. On a $e \approx 2.6$.
- De manière plus générale, pour tout réel k, l'équation ln(x) = k admet pour unique solution le nombre noté exp(k), appelé *exponentielle de k*.

Remarquons alors que exp(1) = e.

Pour l'instant, vous utiliserez la touche *exp* de votre calculatrice pour déteminer des valeurs approchées de exp(k).

Exemple.

- L'équation ln(x) = 2 a pour unique solution x = exp(2).
- L'équation ln(x) = -3 a pour unique solution x = exp(-3).
- Ou encore, $\ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < \exp(-1)$

IV – Exercice classique corrigé (hors exponentielle pour l'instant)

Dans une entreprise, le prix d'une tonne de matière première à l'année 1998 + *x*, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction *f* définie sur [0 ;11] par $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.
On admet que la fonction *f* est dérivable sur cet intervalle et on note *f ′* sa dérivée.

1. Donner un tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs entières de *x* comprises entre 0 et 11.
   Les valeurs de la fonction seront arrondies à 10^{-2}.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ puis étudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle [0 ;11].
   Les valeurs des extremums seront arrondies à 10^{-2}.

3. Tracer la courbe représentant *f* dans un repère orthogonal, où 1cm représente deux années en abscisse et 2 cm représentent un millier d'euros en ordonnée.
4. Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?
5. A l'aide du graphique, déterminer en quelle année la tonne de matière première retrouvera son prix initial de 1998.

Pour plus d'exercices corrigés, voir la partie ds du site ou la partie sujet de Bac

http://mathemitec.free.fr/archives/Tstg-ds.php
http://mathemitec.free.fr/archives/Tstg-ds.php

Corrigé des exercices ou démonstrations

I – Une définition de la fonction logarithme

Démonstration propriété I-1.

> la fonction ln a pour dérivée $\frac{1}{x}$: comme elle est définie pour x > 0, on a $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$, donc d'après le chapitre dérivation, la fonction ln est stritement croissante sur son domaine.
> Aussi, par définition d'une fonction croissante, deux réels a e b seront rangés dans le même ordre que leurs images ln(a) et ln(b).
Autrement dit, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration propriété I-2.
En effet, la fonction ln est croissante et s'annule en 1.
On en déduit le tableau de signes suivant :
Doù la propriété énoncée.

x	$+\infty$		1		$+\infty$
ln	..	$\nearrow$	0	$\nearrow$	..
ln (x)	||	-	0	+	

Corrigé exercice I-3.

1. On a, par définition de ln : $f'(x) = 2\times 0,5x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$. Comme $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, on obtient bien $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

2. Comme sur I, x > 0 on a aussi x+1>0.
f'(x) est donc du signe de x-1 et on a :

x	0		1		$+\infty$
x-1		-	0	+	
f '(x)		-	0	+	
f (x)	..	$\searrow$	0.5	$\nearrow$	..

Démonstration propriété II-1.
> On sait que $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$ pour tout b > 0.

Prenons en particulier $b=\frac{1}{a}$: $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ donc $\ln(1)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

Comme ln(1) = 0, il vient $0=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

> Comme $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$, on a $\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ cad $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

Corrigé exercices II-2.
1. La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$ donc l'équation $\ln(2x-4)=0$ n'a de sens que pour x > 2.

De plus, ln(1) = 0 donc $\ln(2x-4)=0\Leftrightarrow\ln(2x-4)=\ln(1)\Leftrightarrow 2x-4=1\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ qui est bien dans le domaine de définition : $S=\{\frac{5}{2}\}$.

2. De même, ln(2-3x) n'a de sens que pour 2-3x > 0 cad $x<\frac{2}{3}$.

Alors $\ln(2-3x)>0\Leftrightarrow\ln(2-3x)>\ln(1)\Leftrightarrow 2-3x>1\Leftrightarrow\frac{1}{3}>x$ qui est bien dans le domaine de définition : $S=]-\infty;\frac{1}{3}[$.

3. De même, ln(2x+3) n'a de sens que pour 2x+3 > 0 cad $x>-\frac{3}{2}$.

Alors $\ln(2x+3)\leq 0\Leftrightarrow\ln(2x+3)\leq\ln(1)\Leftrightarrow 2x+3\leq 1\Leftrightarrow x\leq -1$: tous ces réels ne sont pas dans le domaine. On a $S=]-\frac{3}{2};-1]$.

Corrigé exercices II-3.
1. La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$ donc cette équation n'a de sens que pour x > 0 et x-4>0 soit au final, pour x >4.

Alors $\ln(x)-\ln(4)=\ln(x-4)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x}{4}\right)=\ln(x-4)\Leftrightarrow\frac{x}{4}=x-3\Leftrightarrow x=4$, qui est hors du domaine : $S=\varnothing$.

2. Cette équation n'a de solutions que pour x > 0 : alors
$2\ln(x)=\ln(16)\Leftrightarrow\ln(x^2)=\ln(16)\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=4\ ou\ x=-4$: seul 4 est dans le domaine donc $S=\{4\}$.

3. Cette inéquation n'a de sens que pour 6x-3 > 0 cad $x>\frac{1}{2}$: dans ce cas,

$\ln(6x-3)\geq 3\ln(2)\Leftrightarrow\ln(6x-3)\geq\ln(2^3)\Leftrightarrow 6x-3\geq 8\Leftrightarrow x>\frac{11}{6}$, qui est bien dans le domaine.

Ainsi, $S=\{\frac{11}{6}\}$.

Corrigé exercice Partie IV.
Dans une entreprise, **le prix d'une tonne de matière première à l'année 1998 + *x***, exprimé en milliers d'euros, **est donné par la fonction *f* définie sur [0 ;11]** par $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.

1. Voici un tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs entières de x comprises entre 0 et 11, où les valeurs de la fonction sont arrondies à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)	6.53	5.51	5.07	4.95	5.04	5.27	5.60	6.01	6.49	7.01	7.58	8.18

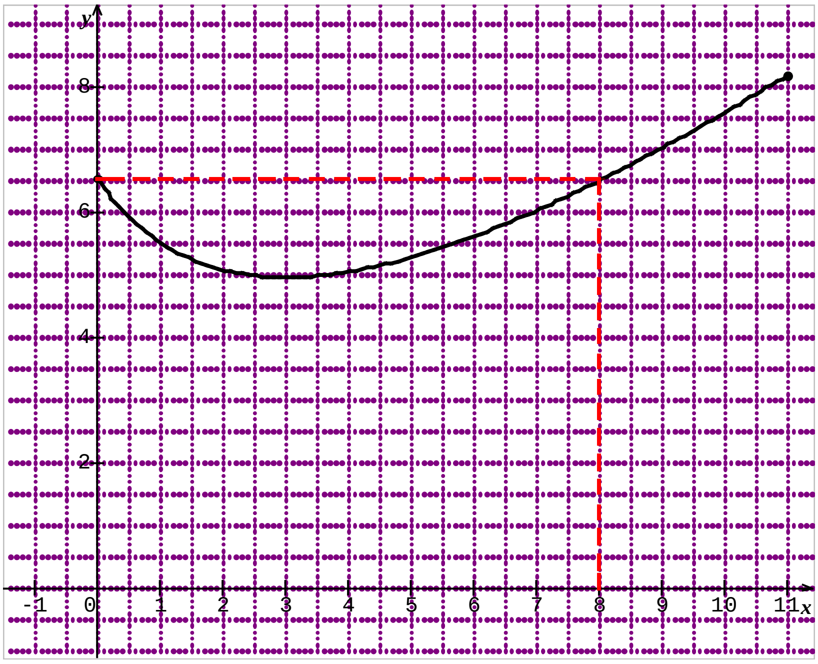
2. On sait que $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ donc $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ et $f'(x) = 1 - \frac{5}{x+2} = \frac{x-3}{x+2}$.

Sur l'intervalle [0 ;11], x est positif donc x + 2 est positif et f '(x) est du signe de x-3. On a alors :

x	0		3		11
f '(x)		-	0	+	0
f (x)	6.53	↘	4.95	↗	8.18

3. Voir la courbe feuille suivante.

4. Selon ce modèle, le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 est estimé par f(7) (car 1998 + 7 = 2005). On estime donc ce prix à 6,01 milliers d'euros soit 6010 €.



5. Précisons en 1998, le prix de la tonne était d'environ f(0) = 6.53 milliers d'euros. A l'aide des traits de construction sur le graphique, c'est au cours de l'année 2006 (x = 8) que le prix d'une tonne de matière première retrouvera son prix initial de 1998.