

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A. ROC.

Pré-requis : Forme algébrique d'un nombre complexe :

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur, si et seulement si : $\bar{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel, si et seulement si : $\bar{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z , on a l'égalité : $z \times \bar{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C , deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O , a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

Partie B. Etude d'un cas particulier.

On pose $a = 3 + i$; $b = -1 + 3i$; $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que H est l'orthocentre du triangle ABC .

Partie C. Etude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C .

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a \times \bar{a} = b \times \bar{b} = c \times \bar{c}.$$

2. On pose $\omega = \bar{b} \times c - b \times \bar{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans la partie A, démontrer que ω est un imaginaire pur.

b. Vérifier l'égalité $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = \omega$ et justifier que : $\frac{b + c}{b - c} = \frac{\omega}{|b - c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\frac{b + c}{b - c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs \vec{AH} et \vec{CB} .

b. Prouver que $(\vec{CB}; \vec{AH}) = \pi/2 + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $(\vec{CA}; \vec{BH}) = \pi/2 + k\pi$, avec k entier relatif).

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

a. Etudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \sqrt{2}$.
- b. Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
- d. Prouver que la suite (u_n) converge.

3. Soit L la limite de la suite (u_n) . Montrer que L est solution de l'équation $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$. En déduire sa valeur.

EXERCICE 3 (non spé Math, 5 points)

Un parachutiste tombe à la vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre.

On fixe l'origine du temps ($t = 0$ en secondes) à ce moment-là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note $v(t)$ la vitesse en m.s^{-1} et $d(t)$ la distance parcourue en mètres à l'instant t .

On admet que v est solution de l'équation différentielle : $v'(t) = 10 \left(1 - \frac{v^2(t)}{25} \right)$: (E)

Par ailleurs, il a été établi que la distance parcourue à l'instant t est : $d(t) = \frac{1}{v(t) - 5}$

0. Expliquer pourquoi, pour un temps suffisamment grand, la vitesse du parachutiste est stabilisée.

On se propose donc de trouver une équation différentielle vérifiée par d et de la résoudre afin de déterminer la vitesse du parachutiste, lorsque celle-ci est stabilisée.

1. Questions de cours :

a. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = 0$.

b. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = b$.

2. a. Montrer que : $v(t) = \frac{1}{d(t)} + 5$.

b. Exprimer $v'(t)$ en fonction de $d(t)$ et de $d'(t)$.

c. Exprimer $v^2(t)$ en fonction de $d(t)$.

d. Prouver que v est solution de (E) si et seulement si, d est solution de l'équation : (E') $d' = 4d + 0,4$

3. Donner la valeur de $v(0)$, puis calculer $d(0)$.

En déduire l'expression de la distance $d(t)$ parcourue à l'instant t .

4. Exprimer alors $v(t)$ en fonction de t ; puis calculer la limite de $v(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 4 (5 points)

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$.

Soit C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$),

(unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A. Etude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B. Etude et propriétés des fonctions f_k . (rappel : k est un paramètre réel strictement positif)

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) = \ln \left(1 + k \frac{x}{e^x} \right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$:

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f_k .

b. Etablir que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

c. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de la tangente T_k à C_k au point O.

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier les positions relatives de C_p et C_m .

6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

EXERCICE 5 (spé Math, 5 points)

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

Corrigé du Bac Blanc

EXERCICE 1.

Partie A

Soit $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1. $z = x + iy$ vérifie $\bar{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -(x + iy) \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur.
L'équivalence est démontrée.

2. De même, $z = x + iy$ vérifie $\bar{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -iy = iy \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ est réel.
L'équivalence est démontrée.

3. On a $z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$.

Partie B.

On pose $a = 3 + i$; $b = -1 + 3i$; $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Pour vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de vérifier que O est équidistant des points A, B et C : $OA = |a| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$, $OB = |b| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ et $OC = \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10}$.
Ainsi : $OA = OB = OC$ donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2.

H a pour affixe $a + b + c = (2 - \sqrt{5}) + i(4 - \sqrt{5})$.

Remarque : pour la construction, $\sqrt{5}$ est la longueur de la diagonale d'un rectangle de côtés 1 et 2...

On a : \vec{AH} a pour affixe $a + b + c - a = b + c = (-1 - \sqrt{5}) + i(3 - \sqrt{5})$ donc $\overline{AH} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{5} \\ 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$

\vec{CB} a pour affixe $b - c = (-1 + \sqrt{5}) + i(3 + \sqrt{5})$ donc $\overline{CB} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Ainsi, $\vec{AH} \cdot \vec{CB} = (-1 - \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = (1 - 5) + (9 - 5) = 0$ donc \vec{AH} orthogonal à \vec{CB} .

On montre de la même façon que $\vec{BH} \perp \vec{CA}$ ce qui prouve que, H étant sur deux des trois hauteurs, c'est l'orthocentre.

Partie C.

1. Encore une fois, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC $\Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$
 $\Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 = |c|^2$ (tout est positif)
 $\Leftrightarrow a \bar{a} = b \bar{b} = c \bar{c}$ d'après Partie A. 3.

2. On pose $\omega = \bar{b}c - b\bar{c}$.

a. Soit donc $\omega = \bar{b}c - b\bar{c}$: $\bar{\omega} = \overline{\bar{b}c - b\bar{c}} = \overline{\bar{b}c} - \overline{b\bar{c}} = b\bar{c} - \bar{b}c = -\omega$ donc ω est imaginaire pur.

b. > On a $(b + c)(\bar{b} - \bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + c\bar{b} - c\bar{c} = |b|^2 + \omega - |c|^2 = \omega$ car $|b| = |c|$

> Par conséquent, $\frac{\omega}{|b - c|^2} = \frac{(b + c)(\bar{b} - \bar{c})}{(b - c)(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{b + c}{b - c}$ en remarquant que $|b - c|^2 = (b - c)(\overline{b - c}) = (b - c)(\bar{b} - \bar{c})$.

c. Ainsi, $\frac{b + c}{b - c} = \frac{\omega}{|b - c|^2}$: d'après 2a, ω est un imaginaire pur et comme $|b - c|^2$ est un réel, nécessairement $\frac{b + c}{b - c}$ est lui aussi imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a. \vec{AH} a pour affixe $a + b + c - a = b + c$ et \vec{CB} a pour affixe $b - c$.

b. Comme $(\vec{CB}; \vec{AH}) = \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_C}\right) = \arg\frac{b+c}{b-c}$, d'après le C.2c, $(\vec{CB}; \vec{AH}) = \pi/2 + k\pi$ puisque $\frac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

(On admet de même que $(\vec{CA}; \vec{BH}) = \pi/2 + k\pi$, avec k entier relatif).

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

> $(\vec{CB}; \vec{AH}) = \pi/2 + k\pi$ donc $\vec{CB} \perp \vec{AH}$ ce qui prouve que (AH) est une hauteur du triangle ABC.

> $(\vec{CA}; \vec{BH}) = \pi/2 + k\pi$ donc $\vec{CA} \perp \vec{BH}$ ce qui prouve que (BH) est aussi une hauteur du triangle ABC

H étant le point commun de ces deux hauteurs, H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 2.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

a. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son domaine $]0; +\infty[$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $2x^2 > 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x - \sqrt{2}$.

Ainsi, f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ et croissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

b. Voir figure.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \sqrt{2}$.

Soit P(n) la proposition « $u_n \geq \sqrt{2}$ ».

> Initialisation : $u_1 = 9/4$ et $9/4 \geq \sqrt{2}$ donc P(1) est vraie.

> Hérédité : montrons que **SI** $u_n \geq \sqrt{2}$ **ALORS** $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

Supposons donc que $u_n \geq \sqrt{2}$:

sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, f est croissante donc $f(u_n) \geq f(\sqrt{2})$ c'est à dire $u_{n+1} \geq f(\sqrt{2})$

Mais $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ cqfd ...

Cette démonstration prouve que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

b. On a $x - f(x) = \dots = \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x}$: or, si $x \geq \sqrt{2}$ alors $x - \sqrt{2} \geq 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ (et $x > 0$) donc $x - f(x) \geq 0$ et donc $f(x) \leq x$.

c. D'après 2a, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$: on peut alors appliquer le 2b à $x = u_n$ donc on trouve $f(u_n) \leq u_n$ c'est à dire $u_{n+1} \leq u_n$: (u_n) est bien décroissante.

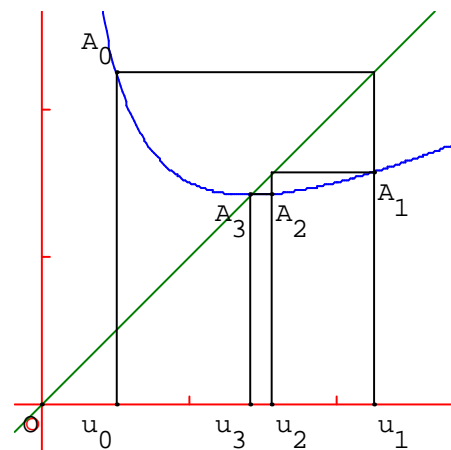
d. On a démontré que (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$ (2. a.), et que (u_n) décroît (2. c.). On en déduit que (u_n) est convergente : notons L sa limite.

3. > (u_n) converge vers L : comme $u_n \geq \sqrt{2}$ on a $L \geq \sqrt{2}$.

> $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue sur $]0; +\infty[$ (car dérivable sur son domaine) donc en L $\geq \sqrt{2}$.

On sait alors que L est un point fixe de f cad L est solution de l'équation $L = f(L)$.

Comme $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ car $x > 0$, on en déduit que $L = \sqrt{2}$.



Exercice 3.

0. Lorsqu'un objet tombe sur terre, soumis à l'attraction, sa vitesse de chute augmente avec le temps :

> avec une accélération quasi-constante (au début de sa chute en tout cas)

> mais cette augmentation va être atténuée par la résistance du milieu dans lequel cet objet est en déplacement comme l'atmosphère. L'objet subit ainsi une force, opposée à la gravitation, d'autant plus forte que l'objet va vite.

> La résistance de l'air augmente quand la vitesse de l'objet en chute libre augmente, ainsi, l'accélération s'annule et la vitesse de chute devient constante.

Au bout d'un (grand) moment, il y a équilibre entre la gravitation et la résistance et l'objet n'accélère plus. Il attend sa vitesse maximale (sur terre).

Demander à votre prof de physique pour avoir une explication plus détaillée...

1. Questions de cours :

a. Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = 0$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} , par $y(t) = k e^{mt}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} , par $y(t) = k e^{mt} - \frac{b}{m}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2a. Sachant que $d(t) = \frac{1}{v(t) - 5}$, on a $\frac{1}{d(t)} = v(t) - 5$ et donc $v(t) = \frac{1}{d(t)} + 5$.

2b. Comme $v(t) = \frac{1}{d(t)} + 5$ on a $v'(t) = \frac{-d'(t)}{[d(t)]^2} = \frac{-d'(t)}{d^2(t)}$.

Rappel : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

2c. Puisque $v(t) = \frac{1}{d(t)} + 5$ on a $v^2(t) = \frac{1}{d^2(t)} + \frac{10}{d(t)} + 25$.

2d.

v est solution de (E) $\Leftrightarrow v'(t) = 10 \left(1 - \frac{v^2(t)}{25}\right) \Leftrightarrow \frac{-d'(t)}{d^2(t)} = 10 \left(1 - \frac{1}{25d^2(t)} - \frac{10}{25d(t)} - 1\right)$ d'après b. et c.

$$\Leftrightarrow -d'(t) = 10 \left(-\frac{1}{25} - \frac{10d(t)}{25}\right)$$

$$\Leftrightarrow d'(t) = \frac{10}{25} + \frac{100d(t)}{25}$$

$$\Leftrightarrow d'(t) = 0,4 + 4d(t)$$

$$\Leftrightarrow d \text{ est solution de (E')} : d' = 4d + 0,4$$

L'équivalence est démontrée.

3.

> L'énoncé nous dit que $v(0) = 55$ et $d(t) = \frac{1}{v(t) - 5}$ donc $d(0) = \frac{1}{50}$.

> d est solution de (E') donc $d(t) = k e^{4t} - 0,4/4$ avec $k \in \mathbb{R}$ c'est à dire $d(t) = k e^{4t} - 0,1$.

Alors $d(0) = k - 0,1$ et comme $d(0) = 1/50 = 0,02$ on a $k = 0,12$.

Ainsi d est la fonction définie sur \mathbb{R} par $d(t) = 0,12e^{4t} - 0,1$.

4. On sait que $v(t) = \frac{1}{d(t)} + 5 = \frac{1}{0,12e^{4t} - 0,1} + 5$

> Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{4t} \rightarrow +\infty$ donc $\frac{1}{0,12e^{4t} - 0,1} \rightarrow 0$: on en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 5 \text{ ms}^{-1}$.

> Ainsi, pour un temps suffisamment grand (et s'il descend d'assez haut !), la vitesse de chute du parachutiste va se stabiliser à 5 ms^{-1} et il devrait se poser en douceur ...

Exercice 4.

Partie A.

Etude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. f_1 est dérivable et on a : $f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x} = \frac{1 - x}{e^x + x}$.

Etude des variations :

Sur $[0 ; +\infty[$, $f_1'(x)$ a le signe de $1 - x$ car $e^x + x > 0$ donc :
 f_1 est croissante sur $[0 ; 1[$
 f_1 est décroissante sur $]1 ; +\infty[$
 f_1 prend une valeur maximale $f_1(1)$ en 1.

2.

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln(e^x - x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x - x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$: on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée) donc on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = 1$ et puisque $\ln 1 = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\nearrow \ln(1+1/e)$	$\searrow 0$

Partie B.

Etude et propriétés des fonctions f_k .

1. Les fonctions f_k sont dérivables pour tout entier non nul k et on a $f_k'(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{e^x + k - e^x - kx}{e^x + kx} = \frac{k(1 - x)}{e^x + kx}$.

Etude des variations : Sur $[0 ; +\infty[$, $f_k'(x)$ a le signe de $1 - x$ car $e^x + kx > 0$ et $k > 0$
 donc : f_k est croissante sur $[0 ; 1[$
 f_k est décroissante sur $]1 ; +\infty[$
 f_k prend une valeur maximale $f_k(1)$ en 1.

2.

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f_k(x) = \ln(e^x - kx) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x - kx}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{kx}{e^x}\right)$ donc $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + k \frac{x}{e^x} = 1$: puisque $\ln(1) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$.

3a. Dresser le tableau de variation de la fonction f_k .

x	0	1	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	0	$\nearrow \ln(1+k/e)$	$\searrow 0$

3b. Posons donc $g(x) = \ln(1+x) - x$: g est dérivable et

Comme x est positif, g' est négative et g décroît sur $[0 ; +\infty[$, la fonction g décroît à partir de 0 donc elle est négative sur $[0 ; +\infty[$.

Ainsi $\ln(1+x) - x \leq 0$ et donc $\ln(1+x) \leq x$.

on a $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$.
 l'intervalle $[0 ; +\infty[$: comme $g(0) = 0$

3c. D'après les variations de f_k , on sait que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f_k(x) \leq \ln(1 + \frac{k}{e})$, et comme $\frac{k}{e} \geq 0$, d'après la question précédente,

$\ln(1 + \frac{k}{e}) \leq \frac{k}{e}$. Ainsi, $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$ pour tout x positif.

4. La tangente T_k à C_k au point O a pour équation $y = f'_k(0)(x - 0) + f_k(0)$: or $f'_k(0) = k$ et $f_k(0) = 0$ donc T_k a pour équation $y = kx$.

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier les positions relatives de C_p et C_m .

Etudions le signe de $f_m(x) - f_p(x)$: $f_m(x) - f_p(x) = [\ln(e^x + mx) - x] - [\ln(e^x + px) - x] = \ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px)$.

Mais avec $x > 0$ et $p < m$ on a $px < mx \Leftrightarrow e^x + px < e^x + mx$

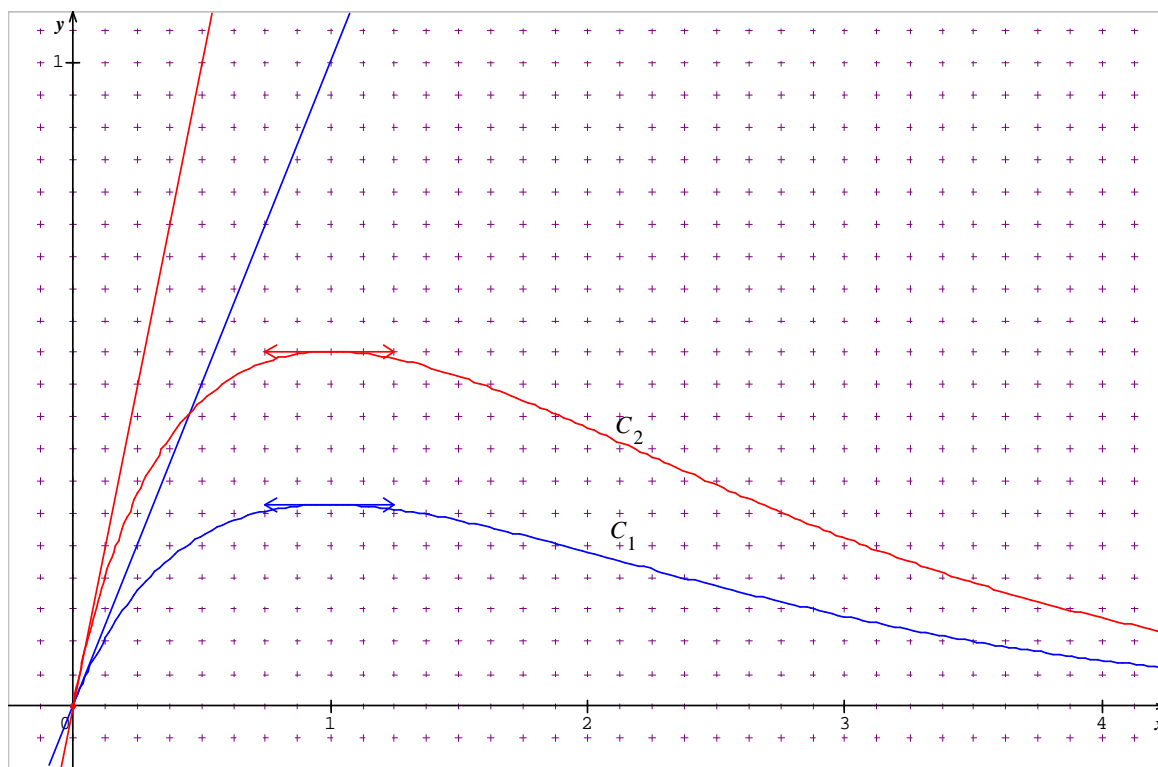
$\Leftrightarrow \ln(e^x + px) < \ln(e^x + mx)$ car \ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$

et donc $f_m(x) - f_p(x) \geq 0$: ceci prouve que C_p est en dessous de C_m .

6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Pour C_1 : $f_1(1) = \ln(1 + 1/e)$ et T_1 a pour équation $y = x$

Pour C_2 : $f_2(1) = \ln(1 + 2/e)$ et T_2 a pour équation $y = 2x$



Exercice 5 [spé].

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

1a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

Exemple : pour $a = 3$, on teste l'équation $3y \equiv 1[7]$ avec y dans A_7 : pour $y = 4$, $3 \times 4 = 12 \equiv 5[7] \Leftrightarrow 3 \times 4 \not\equiv 1[7]$.

1b.

1^{ère} méthode (la plus astucieuse) : En s'aidant du 1a, multiplions chaque membre par 5 : $3x \equiv 5[7] \Rightarrow 15x \equiv 25[7]$ mais

$$\begin{cases} 25 \equiv 4[7] \\ 15x = 14x + x \text{ donc } 15x \equiv x[7] \end{cases} : \text{ ainsi, } 3x \equiv 5[7] \Rightarrow x \equiv 4[7].$$

Réciproquement, si $x \equiv 4[7]$ alors $3x \equiv 12[7]$ et donc $3x \equiv 5[7]$.

2^{ème} méthode :

$3x \equiv 5[7]$ ssi il existe un entier k tel que $3x - 7k = 5$: on se retrouve donc avec une équation diophantienne classique.

> le couple $(x_0, k_0) = (4, 1)$ est solution particulière.

> donc (x, k) est solution ssi $3x - 7k = 3x_0 - 7k_0 \Leftrightarrow 3(x - x_0) = 7(k - k_0)$.

Par conséquent, 7 divise $3(x - x_0)$ et comme 7 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x - x_0$.

Ainsi il existe un entier K tel que $x - x_0 = 7K$.

On a alors, d'après l'équation précédente $3 \times 7K = 7(k - k_0) \Leftrightarrow k - k_0 = 3K$.

Les solutions sont donc de la forme $\begin{cases} x = x_0 + 7K \\ k = k_0 + 3K \end{cases}$ et donc $x = 4 + 7K \Leftrightarrow x \equiv 4[7]$.

1c.

> Si a est un élément de A_7 alors a est inférieur à 6 et comme 7 est premier, **a et 7 sont premiers entre eux.**

> Ainsi $ax \equiv 0[7]$ ssi 7 divise ax : comme a et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 7 divise x cad x est un multiple de 7.

Réciproquement, tout entier x multiple de 7 est solution de $ax \equiv 0[7]$ donc l'équivalence est démontrée.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p .

Soit a un élément de A_p .

2a. a est un élément de A_p donc inférieur à p : comme p est premier, tout entier qui lui est inférieur est premier avec p .

D'après le théorème de Fermat, on a alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ et donc a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

2b. Soit r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p .

> démontrons que r est solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

On a par définition $a^{p-2} = ap + r$ et donc, en multipliant par a $a^{p-1} = a^2p + ar$.

Prenons cette égalité modulo p : on obtient, $1 \equiv 0 + ar(p)$ et par conséquent $ar \equiv 1[p]$ [cqfd].

> unicité : soit r' une autre solution de $ax \equiv 1[p]$ avec r' un élément de A_p .

Comme $ar' \equiv 1[p]$, on a $ar' = kp + 1$: de même $ar = kp + 1$ de sorte que $a(r-r') = p(k-k')$.

Ainsi p divise $a(r-r')$: comme p est premier avec a , **p divise $r-r'$.**

> mais r' est dans A_p donc il est inférieur à $p-1$ (et positif)

> r est le reste de la division euclidienne de p donc $0 \leq r < p-1$.

Ainsi $-(p-1) < r-r' < p-1$ et comme p divise $r-r'$, on a forcément $r-r' = 0$ cad $r = r'$, d'où l'unicité.

Par conséquent, le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p est l'unique solution dans A_p de $ax \equiv 1[p]$.

2c. Soient x et y deux entiers relatifs tels que $xy \equiv 0[p]$.

Par définition, p divise xy : mais si p est premier, $p | xy \Rightarrow (p | x \text{ ou } p | y)$, la réciproque étant immédiate.

Ainsi, $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

2d.

> 31 est un nombre premier

> d'après le 2a, $x = 2^{29}$ est solution de $2x \equiv 1[31]$.

> d'après le 2b, le reste α de 2^{29} par 31 est l'unique solution dans A_{31} de $2x \equiv 1[31]$.

De même,

> 31 est un nombre premier

> d'après le 2a, $x = 3^{29}$ est solution de $3x \equiv 1[31]$.

> d'après le 2b, le reste β de 3^{29} par 31 est l'unique solution dans A_{31} de $3x \equiv 1[31]$.

Le trinôme $6x^2 - 5x + 1$ se factorise sous la forme $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ soit encore

$$6x^2 - 5x + 1 = (3x - 1)(2x - 1).$$

Ainsi $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31] \Leftrightarrow (3x - 1)(2x - 1) \equiv 0[31]$: d'après le 2c, cela équivaut à $3x - 1 \equiv 0[31]$ ou $2x - 1 \equiv 0[31]$.

Dans A_{31} , les solutions donc α et β (voir ci-dessus) donc dans \mathbb{Z} l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$ a pour solutions $x \equiv \alpha[31]$ ou $x \equiv \beta[31]$ ou encore $x \equiv 2^{29}[31]$ ou $x \equiv 3^{29}[31]$.