Chapitre
Intégration – Calculs d'aire - Primitives

HISTORIQUE.

Dès l'antiquité, de nombreuses questions se rapportent à des problèmes de calcul d'aire, de volume ou de longueur. Ce n'est qu'à la fin du XVII siècle que le développement du calcul intégral permet des avancées notoires.

Aujourd'hui, il s'avère central dans des domaines variés tels que :

- La Physique, avec le calcul des probabilités, où l'on détermine par exemple la probabilité de présence d'une particule dans un espace donné à l'aide des intégrales (on ne peut en effet déterminer simultanément la position et la vitesse de particules très petites).
- L'informatique ou dans les télécommunications, où l'intégration s'avère nécessaire à la compression de données (pensez à vos mp3) via les transformées de Fourier.
- L'économie, où le calcul intégral permet de déterminer des valeurs telles que « le surplus des consommateurs » ou « le surplus des producteurs »…
- …
- Sans parler des mathématiques, ou par exemple en arithmétique, on déterminera par une intégrale la probabilité qu'un nombre donné soit premier.

Objectifs.

Le principal objectif de ce chapitre est de présenter un premier aspect de l'intégration, de se familiariser avec certaines notations et un vocabulaire que nous rencontrerons avec les primitives.

A travers deux activités d'introduction liées à des calculs d'aire, nous justifierons l'intérêt de la recherche de primitives d'une fonction.
Nous étudierons ensuite leurs propriétés pour revenir finalement à nos problèmes de calcul d'aire ou de volume.

Et, bonne nouvelle, nous prouverons enfin que l'aire d'un carré de coté de longueur a est a² ! Que de travail…

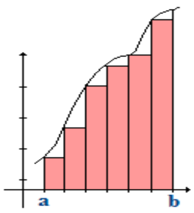
Calculer l'aire sous une courbe
Méthode 1 : à l'aide des suites

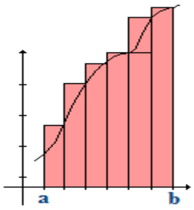
Nous allons présenter brièvement une méthode possible pour calculer l'aire (géométrique) sous une courbe Cf, où f est une fonction **continue**, **positive sur [a ;b]**.
Pour plus de clarté du schéma, nous supposerons que f est monotone, mais de manière générale cette contrainte n'est pas nécessaire.

Objectif.
Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe Cf et l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'aire A du domaine D des points M(x,y) tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.
Remarquons tout de suite que cette aire A est finie.

Principe.
On partage le segment [a ;b] en n segments de même longueur : chacun mesure donc $h = \dfrac{b-a}{n}$ unités. Sans rentrer dans les détails techniques :

> on considère les rectangles qui se situent sous la courbe Cf et on note u_n la somme des aires de ces rectangles (figure gauche).
> on considère les rectangles qui se situent au dessus de la courbe Cf et on note v_n la somme des aires de ces rectangles (figure droite).





Comme on l'observe graphiquement, plus n est grand, plus la somme des aires des rectangles de gauche (ou de droite) sont proches de A.

On peut même montrer que ces suites sont adjacentes, et comme on a pour tout $n \ge 1,\ u_n \le A \le v_n$ (cad que la somme des aires des rectangles de la figure de gauche est inférieure à l'aire A du domaine cherchée, mais que sur la figure de droite, cette somme est supérieure), ces deux suites convergent vers A.

Cette méthode de calcul d'aire est classique, et elle a l'avantage de se programmer très simplement (à la calculette par exemple) : on peut d'ailleurs préciser que les calculatrices utilisent de tels procédés.

Elle est cependant peu exploitable pour nous mathématiciens (!) qui cherchons à exprimer de manière explicite la valeur de A : on ne peut pas en effet se contenter de dire que $A = \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$ ou de consulter sans arrêt notre calculette !
Attendons donc les primitives…

Juste pour information (hors programme) et pour que vous testiez la formule précédente sur votre calculatrice, on a, pour toute fonction continue sur [0 ;1],

$$A = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

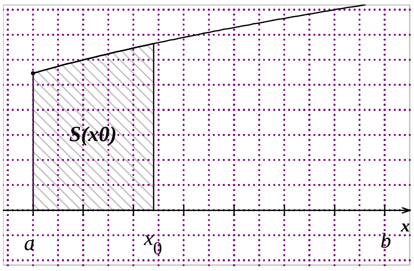
Vous pourrez par exemple vérifier que $f(x) = x^2$ *et pour n grand, la valeur ci-dessus est proche de la valeur exacte de A,* $1/3$.

Calculer l'aire sous une courbe
Méthode 2 : à l'aide des primitives [à comprendre]

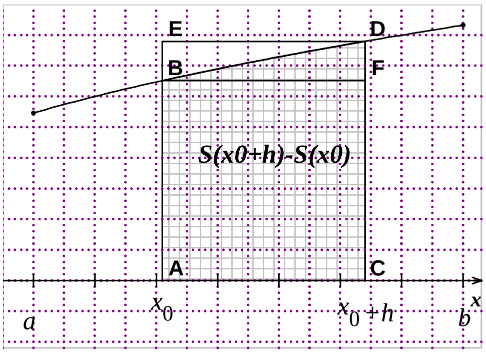
Voici une méthode qui sera beaucoup plus exploitable en terminale : elle a par ailleurs l'avantage d'introduire de manière naturelle un nouvel objet mathématique, les primitives.

Enoncé.
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ;b]. On suppose, pour plus de commodités, que f est croissante sur cet intervalle.
On note D(**a**,**b**) le domaine défini par $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$, et on cherche à déterminer l'aire (géométrique) de ce domaine.

Présentation de la méthode.



Soit x_0 un réel de [a,b] : on note $S(x_0)$ l'aire du domaine D(a, x_0) défini par $\begin{cases} a \le x \le x_0 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.
Nous allons prouver que la fonction S est dérivable en x_0 **et que** $S'(x_0) = f(x_0)$**.**



Soit alors h un réel positif très petit de sorte que x_0 +h soit encore dans [a,b] : l'aire du domaine D(x_0 , x_0+h) est donc donnée par $S(x_0+h) - S(x_0)$.

Mais cette aire est comprise entre l'aire des rectangles ACFB et ACDE.

On obtient donc naturellement l'encadrement

$$\boxed{hf(x_0) \le S(x_0+h) - S(x_0) \le hf(x_0+h)}.$$

> h étant positif, on en déduit que $f(x_0) \le \dfrac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \le f(x_0+h)$.

> la fonction f étant continue en x_0 (hypothèse capitale donc !), on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} = f(x_0)$.

> La fonction S est donc dérivable à droite de x_0 , et en faisant le même travail avec h négatif, on vient de prouver que la fonction aire S est dérivable en x_0 de nombre dérivé $S'(x_0) = f(x_0)$.

Ainsi, pour trouver l'aire située entre la courbe Cf et l'axe des abscisses, il suffit de déterminer une fonction S, telle que S' = f. Une telle fonction s'appelle une primitive de f.
Pour trouver l'aire, on calculera alors S(b) – S(a).

Application. *Déterminons l'aire A située entre Cf et l'axe (Ox) sur [0 ;1], avec* $f(x) = x^2$.

Une primitive de f est par exemple $S(x) = \dfrac{x^3}{3}$ puisque S'(x) = f(x) = x². L'aire A cherchée est donc

$S(1) - S(0) = \dfrac{1}{3}$ unités d'aire.

Remarque : *Nous remarquerons plus tard que pour toute primitive F de f, le résultat F(1) – F(0) donnera encore* $1/3$.

I. Primitives d'une fonction : premières propriétés

Définition. Soit f définie et continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F, dérivable sur I telle que F' = f.

Remarque : l'activité précédente permet d'affirmer qu'une fonction continue, positive et monotone admet toujours au moins une primitive, la fonction aire S définie ci-dessus.
Un travail analogue permettrait aussi de conclure, seulement pour les fonctions continues sur [a ;b].

Exemples.
> La fonction f(x) = 2x admet comme primitives : F(x) = x^2, G(x) = x^2+ 3, …, H(x) = x^2+ k pour tout réel k.
> La fonction f(x) = –3 admet comme primitives F(x) = –3x ou encore G(x) = F(x) + k, pour tout réel k.
> La fonction nulle admet comme primitives les fonctions constantes.

Propriétés I-1 [à faire]. f désigne une fonction continue sur l'intervalle I.
> Si F est une primitive de f sur I, alors $\forall c \in \mathbb{R}$, F + c est une primitive de f : f admet donc une infinité de primitives sur I.
> Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I alors elles sont égales à une constante additive prés : autrement dit, $\exists c \in \mathbb{R}$, tel que G(x) = F(x) + c pour tout x de I.

Démonstration I-1.
Voir dernières pages.

En conclusion, pour connaître les primitives d'une fonction, il suffit d'en voir une F, toutes les autres sont alors de la forme F + c, où c sera déterminée par une constante initiale.
Le gros du travail sera de déterminer une primitive F : nous verrons des méthodes dans une partie suivante.

Propriété I-2 [à faire]. Soit f définie et continue sur I. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration I-2.
Voir dernières pages.

Exercice I-3.
1. Déterminer la primitive de f(x) = 2x + 3 qui vaut 1 en 0.
2. Déterminer une primitive de g(x) = e^{-x}.
3. Déterminer les primitives de $h(x) = \frac{x}{3} - \sin(x)$.
4. Déterminer la primitive de k(x) = $3x^2$ + 1 dont la courbe représentative passe par A(-1 ;1).

Démonstration I-3.
Voir dernières pages.

On constate à travers ces exercices que la première difficulté consiste à trouver une primitive d'une fonction donnée.
Il s'agit principalement de lire le tableau de dérivation « à l'envers » : c'est l'objectif de la partie suivante.

II. Recherche de primitives

Les primitives de référence

f est définie sur :	f(x) =	Une primitive de f
IR	k (k ∈ IR)	kx
IR	x	$\frac{x^2}{2}$
IR	x^n, n∈IN	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
ca dépend de n..	x^n, n∈Q\{-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
IR*	$\frac{1}{x}$	ln|x|
IR*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
IR*+	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
IR	e^x	e^x
IR	cos x	sin x
IR	sin x	– cos x
IR \{π/2 + kπ }	1 + tan²x = 1/cos²x	tan x

Remarques.
Je vous déconseille d'apprendre les formules sur fond gris, on peut toutes les retrouver à l'aide de celle de x^n !

Exemples.
> si f(x) = 1/x² alors f(x) = x^{-2} donc F(x) = x^{-2+1}/(–2+1) = x^{-1}/–1 = –1/x.
> si f(x) = 1/$\sqrt{x}$ alors f(x) = $x^{-1/2}$ donc F(x) = $x^{-1/2+1}$/(-1/2 + 1) = $2\sqrt{x}$
…

Les fonctions étant de manière générale exprimée à l'aide de somme ou de produit, nous avons besoin de connaître la compatibilité des primitives avec les opérations classiques.

Primitives et Opérations

Ces propriétés sont évidentes : elles découlent naturellement de la compatibilité de la dérivation avec la somme ou la différence de fonctions.

Propriété. Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors :
> F + G est une primitive de f + g
> k × F est une primitive de k × f pour tout réel k.

Exemples.
Une primitive de 1/x² est -1/x donc une primitive de 3/x² est -3/x.

Attention.
Cette règle ne s'adapte ni au produit, ni au quotient (car ça ne marche pas pour la dérivation).
Par exemple, une primitive de cos est sin, une primitive de 2x est x² mais la fonction x²sin(x) n'est pas une primitive de 2xcos(x)…

A l'aide de la partie suivante, on pourra commencer à déterminer des primitives intéressantes.
Par exemple, avec les outils actuels nous ne sommes pas capables de déterminer une primitive de $(2x+1)^3$.

D'après les formules de dérivation :

si f est de la forme :	Alors F est de la forme :
$u' u^n$, $n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$u^{n+1}/n+1$
u'/u^2	$-1/u$
u'/u	$\ln\|u\|$
$u' e^u$	e^u
$u'/2\sqrt{u}$	$\sqrt{u}$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u'/\cos^2 u$	$\tan u$

Exercices II-1.
Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle I où la fonction est continue (on ne donnera pas de tel intervalle).

$f(x) = (2x+1)^3$ $\quad g(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+ 2x+ 1)^2}$ $\quad h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$i(x) = \sqrt{2x+1}$ $\quad j(x) = 3xe^{x^2}$ $\quad k(x) = \dfrac{5}{3x+1}$

$m(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad n(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Autant vous dire que si vous ne connaissez pas vos formules de dérivation, vous aurez beaucoup de problèmes et de difficultés à déterminer les primitives…

Corrigé exercices II-1 (et stratégie).
Voir dernières pages.

Remarquons d'ores et déjà que qu'avec les méthodes connues, nous ne sommes pas capables de déterminer les primitives de fonctions « simples » telles que ln par exemple.
Le principe d'intégration par parties sera alors d'une grande utilité (partie à venir)…

La notion de primitive tant clairement établie, nous pouvons aborder de manière sereine et décontractée (:-))) un autre objet intimement lié, l'intégrale d'une fonction.

III. Intégrale d'une fonction

Définition. Supposons que f soit continue sur l'intervalle [a ;b].

On appelle intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)dx$, le nombre $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

On notera $[F]_a^b$ le nombre F(b) – F(a) : on a donc $\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b$.

Remarques.

> Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas du choix de la primitive de f : en effet, si G = F + k est une autre primitive, on a G(b) – G(a) = F(b) + k – F(a) – k = F(b) – F(a).
> Le dx sous le signe intégrale est là entre autre pour préciser que l'on intègre la fonction f par rapport à la variable x (utile quand il y aura plusieurs variables).
C'est une variable muette, cela signifie que x n'a aucun rôle privilégié : on pourra aussi bien écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(u)du$ mais on préfère tout de même x en général…

Conséquence Importante.
Si f est une fonction continue sur [a ;b], la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. *Cette notation de primitive s'avérera souvent pratique.*

> En effet, par définition de l'intégrale de a à x, F est une primitive de f.
> On a par ailleurs F(a) = $\int_a^a f(t)dt$ = G(a) – G(a) = 0 si G représente une primitive de f.

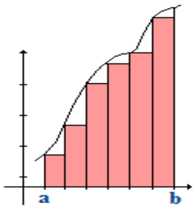
Interprétation graphique importante.

Nous avons vu lors de l'introduction que, lorsque f est une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ;b], pour toute primitive F de f, la quantité F(b) – F(a) représente l'aire géométrique du domaine compris entre la courbe et l'axe (Ox), exprimée en unités d'aire.
Rappelons que l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle OIKJ avec $\vec{OI}=\vec{i}$ et $\vec{OJ}=\vec{j}$, vecteurs de base du repère.

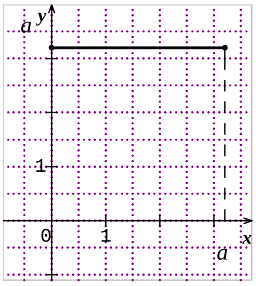
Autrement dit,

Propriété. Pour toute fonction f continue et positive sur [a ;b], l'aire géométrique A du domaine $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ est donnée par $A=\int_a^b f(x)dx\ \ u.a$.

Remarques. Dans ces conditions, on peut mieux interpréter la notion d'intégrale :
$\rightarrow$ f(x)dx représente en fait l'aire d'un rectangle de dimensions f(x) et dx, où dx est très petit
$\rightarrow$ $\int_a^b$ représente alors la somme des aires de tous ces rectangles, quand x parcourt [a ;b] et que dx est très petit [$\int$ est l'analogue de la somme $\sum$ mais pour des ensembles continus].
On retrouve alors la première méthode pour calculer l'aire sous une courbe, et la cohérence avec celle utilisant la primitive.



Application. Calculons l'aire d'un carré de coté de longueur a !



Il s'agit donc de déterminer l'aire comprise entre la courbe représentant la fonction f(x) = a pour x compris entre 0 et a, et l'axe des abscisses.
L'aire cherchée est donc $A = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a a dx$: une primitive de f est F(x) = ax donc $A = F(a) - F(0) = a \times a - a \times 0 = a^2$!!

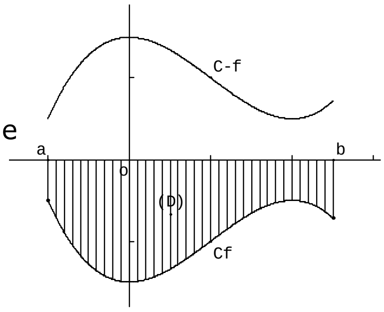
Il a donc fallu attendre la terminale S pour prouver que l'aire que l'aire d'un carré de coté a est a² !!

Nous verrons par la suite que l'utilisation de ce type de méthode conduit à des résultats très étonnants…

Fonctions de signe quelconque.

Maintenant que nous savons interpréter l'intégrale d'une fonction positive (et continue), qu'en est-il des fonctions de signe quelconque ?

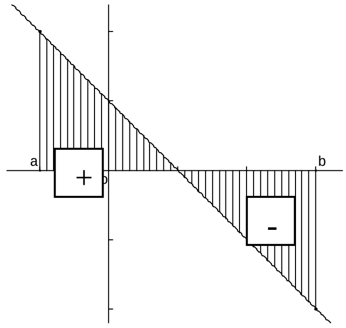
Lorsque f n'est pas positive sur [a ;b], $\int_a^b f(x)dx$ $(= [F]_a^b)$ peut être négative : on ne l'interprète donc plus en terme d'aire géométrique mais **d'aire algébrique**.



> Si f continue et négative sur [a,b], la fonction –f est positive.
De plus, C_{-f} est symétrique de C_f par rapport à l'axe (Ox), et comme une symétrie conserve les aires,

$\int_a^b -f(x)\, dx$ = aire de (D) (positive, en unité d'aire)

Ainsi, $\int_a^b f(x)dx$ est l'opposée de l'aire géométrique de (D).



> Si f continue et change de signe sur [a ;b]

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires algébriques des domaines où f est de signe constant.

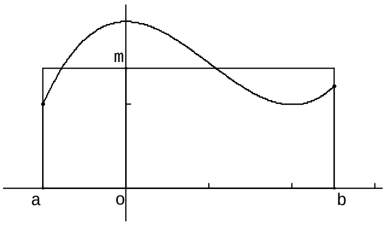
Dans ce cas de la figure ci-contre, si on veut l'aire géométrique du domaine hachuré on calculera $\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx$.

Il s'agira donc d'affecter d'un signe + les intégrales où f est positive, d'un signe – les intégrales où f est négative.

Valeur moyenne d'une fonction.

Comme son nom l'indique, cela représente la valeur que prend en moyenne une fonction sur un intervalle [a ;b].
Evidemment, contrairement aux moyennes discrètes où on divise par le nombre total de valeurs, ici on ne peut pas faire pareil, puisque dans l'intervalle [a ;b], il y a une infinité de réels…

Soit donc A l'aire algébrique $\int_a^b f(x)dx$.

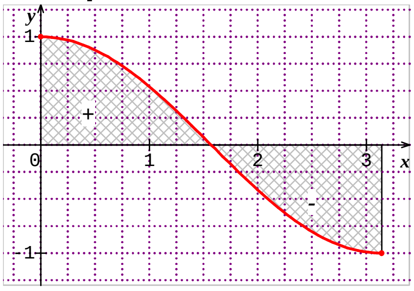


On se demande <u>pour quelle valeur constante de f</u> on obtiendrait la même aire sur [a ;b] ? Notons m cette valeur :

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\times m \Leftrightarrow m = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx$$

Définition. La valeur moyenne de f sur [a,b] est le réel $m = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. Déterminons valeur moyenne de la fonction cosinus sur [0 ; π].



On a $m = \int_0^{\pi}\cos(x)dx = [-\sin x]_0^{\pi} = -\sin\pi + \sin 0 = 0$: en moyenne, la fonction cosinus est donc nulle sur [0 ; π]…

Rassurez vous, c'est normal ! Le domaine où f est positive est symétrique du domaine où f est négative : toute valeur positive de f est donc compensée par sa valeur opposée…
Autrement dit, l'aire algébrique du domaine est nulle.

IV. Propriétés de l'intégration

Dans toute cette partie, f et g désignent des fonctions continues sur un intervalle [a ;b]

Propriété IV-1.

<u>Linéarité</u> : > $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

> pour tout réel k, $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

<u>Positivité</u> : > Si $f(x) \geq 0$ sur [a ;b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

> Si $f(x) \leq 0$ sur [a ;b], alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

<u>Ordre</u> : si $f(x) \leq g(x)$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

<u>Relation de Chasles</u> : Si $c \in$ [a ;b], alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

<u>Inégalité de la moyenne</u> : Si, sur [a ;b], $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

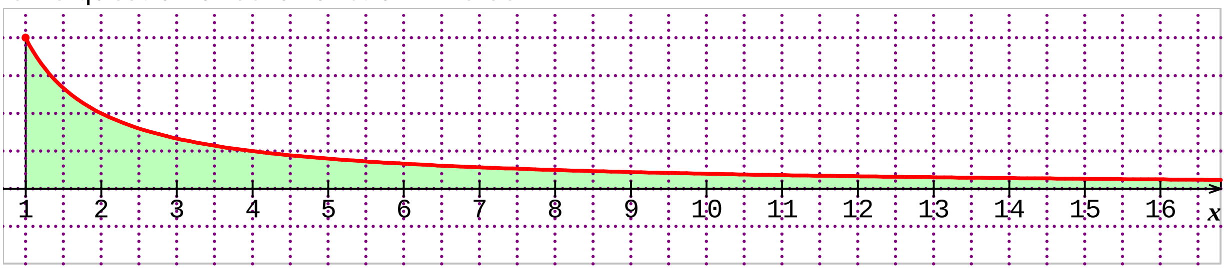
Démonstration IV-1.
Voir dernières pages.

Propriété.
Quels que soient les signes de f et g, sur [a ;b], **si f(x) ≥ g(x)** alors l'aire géométrique du domaine limité par C_f et C_g est $\int_a^b (f-g)(x)dx$.

Pour démontrer ce résultat, on remarquera que si f > g, alors f-g > 0 d'où l'interprétation en terme d'aire géométrique.

Exercice IV-2.

Il est connu que la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2}$ tend vers 0 en l'infini, autrement dit que la courbe Cf représentant la fonction f se rapproche infiniment prés de l'axe des abscisses.
> La question est la suivante : le domaine (non borné) compris entre la courbe Cf et l'axe (0x), pour x compris entre 1 et $+\infty$ est t-il d'aire finie ou infinie ?
> Même question avec la fonction inverse.

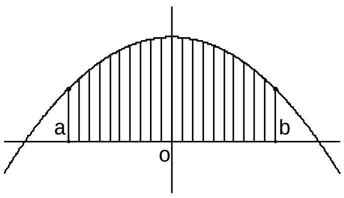


Corrigé IV-2.
Voir dernières pages.

Autres propriétés

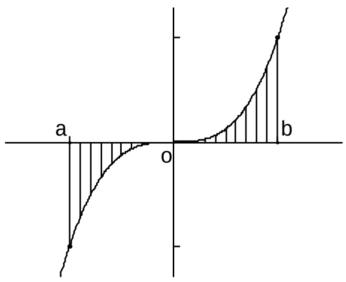
On se contentera des interprétations en terme d'aire algébrique pour comprendre les propriétés qui suivent :

Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$



> en effet, par symétrie par rapport à (Oy), les domaines à gauche et à droite de l'axe ont même aire.

Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



> toujours par des considérations de symétrie, l'aire algébrique du domaine où f est négative est opposé à celle où f est positive.

Si f est 2π périodique alors $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$

> la courbe Cf étant la translatée suivant le vecteur $2\pi\vec{i}$, et une translation étant une isométrie, l'égalité est justifiée.

Nous avons déjà observé que le calcul des primitives de certaines fonctions était délicat : nous allons voir dans la partie suivante, une méthode pour étendre à un certain type de fonctions le calcul des primitives.

V. Intégration par parties

Nous aurons avant tout besoin d'un résultat trivial :

Si f est une fonction dérivable, de dérivée continue
comme f est une primitive de f′, on a :
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Le Principe de l'intégration par parties est le suivant. Encore une fois, je vous déconseille d'apprendre par cœur une telle formule, tant il est facile de la retrouver…

Soient u et v deux fonctions dérivables de dérivée continue :
comme $(u\times v)' = u'v + uv'$ on a $u'v = (u\times v)' - uv'$: ces fonctions étant continues, on peut les intégrer.
En occultant les dx pour alléger la formule, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'v &= \int_a^b [(uv)' - uv'] \\ &= \int_a^b (uv)' - \int_a^b uv' \quad \text{par linéarité} \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b uv' \quad \text{d'après le résultat ci-dessus}\end{aligned}$$

C'est la formule d'intégration par parties.

Théorème. Sous les hypothèses précédentes, on a : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Maintenant, il faut s'entraîner...

Exercice V-1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie

$I = \int_0^1 x\, e^x dx$ $\qquad$ $J = \int_1^e x \ln x\, dx$

$K(x) = \int_1^x \ln t\, dt,\ x>1$ $\qquad$ $L(x) = \int_0^x \ln(t+1)\, dt,\ x > -1$

Corrigé V-1.
Voir dernières pages.

Remarques.
La méthode d'intégration par parties ne nous permet pas de déterminer une primitive de n'importe quelle fonction continue.
Essayez par exemple avec la fonction $f(x) = e^{x^2}$ … : et bien on ne peut pas !
En fait, on n'est pas capable de déterminer explicitement une primitive de n'importe quelle fonction. On peut dire si elle existe (continuité de f) ou encore en donner quelques propriétés, et c'est déjà pas mal…
Par exemple, pour la fonction $f(x) = e^{x^2}$, on donnera $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ comme primitive de f et on essayera d'en déduire des propriétés.

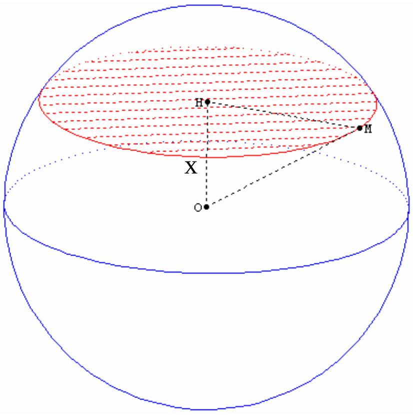
Initialement introduit pour des calculs d'aire ou de volume, nous allons voir que la notion d'intégration nous permet d'obtenir quelques résultats étonnants.

VI. Exemples de Calcul de volumes

Nous sommes enfin parvenus en Terminale S à démontrer que l'aire d'un carré de coté de longueur a était a² !
Entraînons nous, à utiliser la même méthode sur quelques exemples.

Volume d'une sphère de rayon R

Faisons une coupe de la sphère par un plan (disque rouge) :
on est à la hauteur OH = x, d'après le théorème de Pythagore le r



Soit une sphère S de rayon R : considérons le cercle C (dessiné en rouge sur la figure) de rayon r.
Nous avons noté x = OH la distance du centre H du cercle au centre O de la sphère.

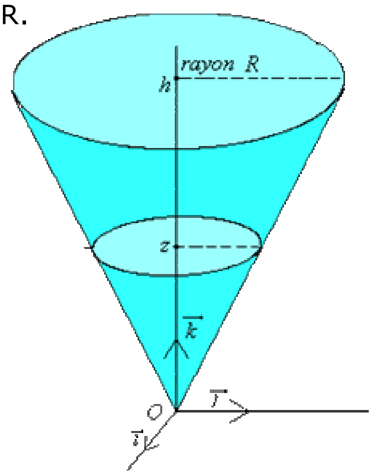
La disque de coupe de hauteur x est a donc pour aire :
$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Pour obtenir l'aire de la sphère, il suffit de sommer par rapport à x, entre –R et R (donc $\int_{-R}^{R} ...dx$), l'aire A(x) de ces disques.

On obtient donc $V = \int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi[R^2 x - \frac{x^3}{3}]_{-R}^{R} = .. = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Volume d'un cône

Considérons un cône de hauteur h dont la base est un cercle de rayon R.



Faisons en une section par un plan P, parallèle à la base, située à une hauteur z de O.

On doit avant tout déterminer l'aire D(z) de cette section (disque).
D'après le théorème de Thalès, le rayon de ce disque est
$R\frac{z}{h}$ donc sa surface est $D(z) = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 z^2$.

Maintenant, si nous sommons ces aires pour z entre 0 et h, on obtient le volume du cône : $V = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h h^2 dh = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \times \frac{h^3}{3} = \pi\frac{R^2 h}{3}$.

Pour plus d'exercices liés à l'intégration ou aux calculs de primitives :
- sujets corrigés de Bac : http://mathemitec.free.fr/bac/ts/bac-sujet-corrige.php
- sujets corrigés de ds : http://mathemitec.free.fr/archives/Ts-ds.php

Démonstrations des propriétés.
Corrigé des exercices.

I. Primitives d'une fonction : premières propriétés

Démonstration I-1.
> Si F est une primitive de f sur I, F' = f : mais pour tout réel c, (F+c)' = F' = f donc F+c est aussi une primitive de f.
> Si F et G sont deux primitives de f sur I, (F-G)' = F' − G' = f − f = 0.
Comme I est un intervalle, la fonction F-G est constante sur I et $\exists c \in \mathbb{R}$, tel que F - G = c.

En conclusion, pour connaître les primitives d'une fonction, il suffit d'en voir une F, toutes les autres sont alors de la forme F + c, où c sera déterminée par une constante initiale.
Le gros du travail sera de déterminer une primitive F : nous verrons des méthodes dans une partie suivante.

Démonstration I-2.
f est continue sur I donc elle admet une primitive G : F est donc de la forme F = G + k, où k est un réel.
$F(x_0) = y_0 \Leftrightarrow G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$: k existe, il est unique et la primitive F cherchée est donc $F = G + y_0 - G(x_0)$.

Démonstration I-3.
1. F est de la forme F(x) = x² + 3x + k : F(1) = 0 donc k = -4 et F(x) = x² + 3x - 4 es la primitive cherchée.
2. Une primitive de g est $G(x) = -e^{-x}$ puisque G' = g.
3. Les primitives de h sont les fonctions de la forme $H(x) = \frac{x^2}{6} + \cos(x) + k$ où k est un réel.
4. Les primitives de k sont les fonctions de la forme $K(x) = x^3 + x + c$: comme K(-1) = 1, on a c = 3. Ainsi $K(x) = x^3 + x + 3$ est la primitive cherchée.

On constate à travers ces exercices que la première difficulté consiste à trouver une primitive d'une fonction donnée.
Il s'agit principalement de lire le tableau de dérivation « à l'envers » : c'est l'objectif de la partie suivante.

II. Recherche de primitives

Corrigé exercices II-1 (et stratégie).
La stratégie que je vous conseille est la suivante :
1. reconnaître la forme de f et en déduire la forme de F
2. dériver α F et adapter par des constantes multiplicatives pour avoir F' = f.

> $f(x) = (2x+1)^3$ est de la forme u^3 qui admet donc une primitive de la forme $\frac{u^4}{4}$.

Comme $\left[(2x+1)^4\right]' = 4 \times 2 \times (2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$: il y a un $\times 8$ en trop ; donc $F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8}$

> $g(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$ dont une primitive est $\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$.

Comme $\left(\frac{1}{x^2+2x+1}\right)' = -2\frac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}$, il y a un $\times(-2)$ en trop donc $G(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+2x+1}$.

> On a $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ = u'/u donc $H(x) = \ln|x^2+1| = \ln(x^2+1)$ puisque pour tout x, $x^2+1>0$.

> $i(x)=\sqrt{2x+1}$ est de la forme $\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$: à priori, on n'en connaît pas de primitives, mais comme u' est une constante, i est en fait de la forme $u'u^{\frac{1}{2}}$ dont une primitive est $\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}$.

Comme $\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]'=\frac{3}{2}\times 2\times(2x+1)^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2x+1}$, on a $I(x)=\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

> $j(x)=3xe^{x^2}$ est de la forme $u'e^u$ dont une primitive est e^u : comme $\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$, on a $J(x)=3\frac{e^{x^2}}{2}$.

> $k(x)=\frac{5}{3x+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est ln|u| : comme $(\ln(3x+1))'=\frac{3}{3x+1}$, on a $K(x)=\frac{5}{3}\times\ln(|3x+1|)$.

> $m(x)=\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(x)$ est donc de la forme u'u dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$: comme $\left[(\ln x)^2\right]'=2\frac{1}{x}\ln(x)$, on a $M(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

> $n(x)=\frac{1}{x\ln(x)}=\frac{1/x}{\ln(x)}$ est donc égale à $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est ln|u| : ainsi $N(x)=\ln(\ln x)$.

IV. Propriétés de l'intégration

Démonstration IV-1.
Comme d'habitude, F désigne une primitive de f, G une primitive de g.

Linéarité : > $\int_a^b (f+g)(x)dx = [F+G]_a^b$ puisque F+G est une primitive de f+g.

Ainsi $\int_a^b (f+g)(x)dx$ = F(b)+G(b) – F(a) + G(a) = F(b)-F(a) + G(b)-G(a) = $[F]_a^b+[G]_a^b$

Donc $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

> Même démarche en remarquant que kF est une primitive de kf.

Positivité : > Si f(x) ≥ 0 sur [a ;b], alors $\int_a^b f(x)dx$ représente une aire géométrique donc $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

> Si f(x) ≤ 0 sur [a ;b], alors –f est positive et on utilise les deux résultats précédentes.

Ordre : si f(x) ≤ g(x) sur [a ;b] alors g – f est positive donc $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$.

Comme $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, on obtient le résultat voulu.

Relation de Chasles : Si c ∈ [a ;b], alors $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a) et

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ = F(c) – F(a) + F(b) – F(c) = F(b) – F(a), d'où l'égalité cherchée.

Inégalité de la moyenne : Conséquence directe du fait que l'intégrale conserve l'ordre (lorsque a<b), en remarquant que $\int_a^b m dx = [mx]_a^b = m(b-a)$.

Corrigé IV-2.
Autrement dit, on nous demande de calculer $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx$.

Si $f(x)=\frac{1}{x^2}$:

> $\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = 1-\frac{1}{A}$

> Par conséquent, $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx = 1$

Oui, l'aire est finie (bien que le domaine soit « infini », on dit en général domaine non borné).

Si $f(x)=\frac{1}{x}$:

> $\int_1^A \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^A = \ln A$

> Par conséquent, $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx = +\infty$

Non, cette fois l'aire est infinie…

V. Intégration par parties

Corrigé V-1.
Vous remarquerez qu'il y a en générale deux choix pour la fonction u : de manière générale, on privilègera les puissances de x pour u.
La calcul de u' permettra alors de faire baisser cette puissance, jusqu'à disparaître éventuellement…

> Pour I :
On pose v(x) = x donc v'(x) = 1
u'(x) = e^x donc u(x) = e^x

Ainsi, d'après la formule d'IPP, I = $[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$ = 1e – 0 – e + 1 = 1.

> Pour J :
On pose u'(x) = x donc u(x) = x²/2
v(x) = lnx donc v'(x) = 1/x

Ainsi, J = $[(x^2\ln x)/2]_1^e - \int_1^e x/2\, dx = (e^2\ln e)/2 - [x^2/4]_1^e$ = … = e²/4 + ¼.

> Pour K(x) : remarquons que K est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.
On pose u'(t) = 1 (astuce) donc u(t) = t
v(t) = ln t donc v'(t) = 1/t

Ainsi K = $[t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1dt = x\ln(x) - [t]_1^x = x\ln(x) - x + 1$: voici donc une primitive de ln !

> Pour L(x) :
On pose u'(t) = 1 (astuce) donc u(t) = t
v(t) = ln(t+1) donc v'(t) = 1/(t+1)

L = $[(t+1)\ln(t+1)]_0^x - \int_0^x 1dt = (x+1)\ln(x+1) - [t]_1^x = (x+1)\ln(x+1) - x + 1$.