Chapitre
Dénombrement – Loi Binomiale.

Note
Tous les exercices ou les démonstrations des propriétés de ce chapitre se trouvent à la fin de ce document.

I. Quelques règles de dénombrement

Considérons un ensemble E de n éléments discernables et notons le par exemple $E=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Définition. On appelle p-liste ou ***p-uplet*** de E une liste de <u>p éléments ordonnés</u> de E.

Exemples. Considérons un jeu de 32 cartes (l'ensemble E).

- un 2-uplet de E (appelé aussi couple) est par exemple $(Roi\ coeur, As\ \ pique)$, $(7\ trèfle, 10\ trèfle)$...
  Remarquons que les couples $(Roi\ coeur, As\ \ pique)$ et $(As\ \ pique, Roi\ coeur)$ sont des couples différents.
  L'ordre des éléments a une importance dans un p-uplet *: c'est la notation entre parenthèses qui permet de l'exprimer (comme pour des coordonnées).*
- Un 3-uplet (ou triplet) dans un ensemble $\{a,b,c\}$ de 3 éléments est (a,b,c) ou (a,c,b)...

La propriété suivante nous donne le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments, autrement dit, le nombre de façons d'ordonner p éléments parmi n.

Propriétés I-1. Soit E un ensemble à n éléments, $n\in\mathbb{N}^*$. Le nombre de p-uplets de E est donné par

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1).$$

Justification. On doit choisir p éléments parmi n, sans remise, en tenant compte de l'ordre.
Il y a n choix pour le premier élément, n-1 pour le second,…, n-(p-1) pour le pième, d'où le résultat.
Remarquez qu'entre n (que l'on peut voir comme n-0) et n-p+1 (que l'on peut voir comme n-[p-1]), il y a bien p nombres.
> A l'aide d'un arbre, on pourrez aussi obtenir le résultat.

Exercices I-2.
1. Déterminer le nombre de tiercés et de quartés dans une course à 12 chevaux.
2. De combien de façons peut-on distribuer 6 cartes à 6 personnes (1 carte par personne) ?

Définition. On appelle ***permutation*** un n-uplet d'un ensemble à n éléments.

En prenant p = n dans la propriété I-1, on obtient le résultat suivant :

Propriétés I-2. Le nombre de permutations de E (qui a n éléments) est donné par

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1.$$

Exemple. Le mot ABRI possède $4\times3\times2\times1=24$ anagrammes : il y a en effet façons de permuter ou réordonner 4 lettres (distinctes).

Définition. Soit un entier non nul. On appelle « ***factorielle n*** » ou « ***n factorielle*** » le nombre de permutations de E et on note $n!$ ce nombre.

Autrement dit, on a $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$.

Par ailleurs, par convention on pose $0!=1$.

Exemple. 3 ! = 6 ; (7-3) ! = 4 ! = 24 ; $(n-p)! = (n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times3\times2\times1$.

Exercices I-3. Ecrire le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments à l'aide du symbole factoriel.
On obtient donc la propriété suivante :

Propriétés I-4. Soit E un ensemble à n éléments, $n\in\mathbb{N}^*$. Le nombre de p-uplets de E est donné par

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercices I-5. Effectuer les calculs et simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{5!}{3!}$, $B=4!2!$, $C=n(n-1)!$, $D=\frac{n!}{(n-1)!}$.

Exercices I-6. Exprimer à l'aide du symbole factoriel les nombres suivants :
$A=4\times5\times6\times\ldots\times10$, $B=n(n+1)(n+2)$ et $C=\frac{6\times5}{3\times2}$.

Exercices I-7. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot TAPAS et du mot DEFINITIONS.

Nous sommes donc capables de dénombrer toutes les permutations d'un ensemble ou encore tous ses p-uplets. Rappelons que ces deux notions prennent en compte l'ordre des éléments.
Par contre, nous ne pouvons toujours pas répondre directement aux questions du type « Quel est le nombre de façons de piocher 6 boules parmi 49 ? », « Combien de binômes de délégués peut-on former dans une classe de 30 élèves ? ».
C'est l'objectif de la partie suivante.

II. Les combinaisons

Définition. Soit E un ensemble à *n* éléments. On appelle ***combinaison de p éléments*** de E une partie de E qui compte p éléments (il n'y a donc pas de notion d'ordre).

Exemples.
> Un binôme de délégué est une combinaison de 2 élèves parmi n, n étant le nombre d'élèves de la classe.
> Le tirage de 6 boules parmi 49, au loto, est une combinaison puisque l'ordre de sortie des numéros est sans importance.

Propriété II-1. Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel $p\leq n$, le nombre de combinaisons de p éléments parmi n, noté $\binom{n}{p}$ (« p parmi n ») est donné par : $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque.
> Insistons sur le fait que $\binom{n}{p}$ est un nombre de combinaisons, donc en particulier, c'est un entier !
> Vous devrez pouvoir calculer, la plupart du temps, « p parmi n » sans calculatrice (voir la propriété I-3).

Justification.

- on cherche d'abord les p-uplets parmi n éléments, il y en a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ d'après la partie précédente.
- Mais, dans ces p-uplets, par définition on tient compte de l'ordre des éléments, alors que pour une combinaison, l'ordre importe peu.
  Comme pour les anagrammes, il y a $p!$ façons de permuter ces lettres entre elles, donc dans le calcul précédent, il y a p! fois combinaisons identiques.
- Ainsi, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!/(n-p)!}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice II-2. Considérons une classe de 30 élèves dans laquelle il a 18 garçons.
1. Déterminer le nombre de binôme de délégués qu'on peut former dans cette classe.
2. Même question en imposant cette fois-ci qu'un binôme soit constitué d'une fille et d'un garçon.

Exercice II-3.

- Déterminer le nombre de tirages au loto, de 6 boules parmi 49.
- Pour former son équipe de Basket, un entraîneur choisit 5 joueurs parmi les 8 de son équipe. Combien de telles formations peut-il créer ?
- Lorsqu'il crée un QCM, un enseignant propose de choisir un trinôme de coefficients entiers a, b et c compris entre 0 et 10. Combien de trinômes peut-il ainsi former ?

III. Propriétés des combinaisons

Evidemment nous garderons à l'esprit que $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!}$.

Avant tout, entraînons nous un peu à calculer p parmi n.

Exercice III-1. Sans calculatrice, calculer les combinaisons suivantes :

$$A=\binom{7}{3},\ B=\binom{7}{4},\ C=\binom{10}{0},\ D=\binom{100}{2},\ E=\binom{n}{0},\ F=\binom{n}{n},\ G=\binom{n}{1},\ H=\binom{n}{2}.$$

Voici une propriété à connaître et comprendre.

Propriété III-2. Pour tout entier p compris entre 0 et n, $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$.

Exemple. $\dbinom{100}{99} = \dbinom{100}{1} = 100$.

Propriété III-3. Si p est non nul, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$.

Propriété III-4 : Triangle de Pascal. Pour tout entier p non nul, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

Application : le Triangle de Pascal.
Cette formule du triangle de Pascal va être capitale pour une formule très importante qui viendra un peu plus loin (binôme de Newton). Elle présente un autre intérêt, permettre de calculer simplement et rapidement les premiers « p parmi n » et fournir ainsi un algorithme simple de calcul, à l'aide du Triangle de Pascal.

Chaque coefficient $\binom{n}{p}$ est obtenu en sommant les deux coefficients de la ligne au dessus.

$n \mid p$	0	1	2	3	4	5	...	$p-1$		p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
...	1									
$n-1$								$\binom{n-1}{p-1}$	+	$\binom{n-1}{p}$
										=
n										$\binom{n}{p}$

> Vous remarquerez la symétrie des coefficients qui s'expliquent par la relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

La formule qui suit est un résultat central de ce chapitre. Elle possède de nombreuses appliquons, que nous effleurerons par la suite…

Propriété III-5 : Formule du binôme de Newton.
Pour tout complexes a et b, pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n .$$

On appellera les $\binom{n}{p}$ les coefficients binomiaux.

Remarque. Les monômes $a^{n-k} b^k$ ont toujours un degré total égal à n.

Applications III-6. Développer $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.

Exercice III-7.

- Donner la forme algébrique de $(2+i)^4$.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

Nous sommes maintenant capables de linéariser n'importe quelle puissance de sinus ou de cosinus. Essayons à l'ordre 3.

Application III-8. A l'aide la formule d'euler, linéariser $\sin^3(x)$ puis en déduire une primitive.

<u>Rappel</u> : $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

IV. Loi Binomiale

Rappelons que si X désigne une variable aléatoire discrète (en gros, elle prend au plus $\mathbb{N}$ valeurs, si vous voyez ce que je veux dire), on appelle loi de X, la probabilité qu'elle prenne chacune de ses valeurs (voir les rappels de Première S su site, si nécessaire).

Epreuve de Bernoulli.

Définition IV-1. Une épreuve de Bernoulli est une épreuve n'admettant que deux issues, cad que 2 résultats possibles. On appelle en général ces issues *Succès* (noté S) et *Echec*.
On a alors $p(S)=p$ et $p(\overline{S})=1-p$ où p est une réel compris entre 0 et 1.

Exemples.

- Jet d'un dé : S = « obtenir le 6 » et on a $p(S)=1/6$.
- Etude du matériel d'une entreprise, S = « matériel défectueux ».
- Epidémie dans une population, S = « être sain »
- …

Définition IV-2. On dit qu'une variable aléatoire X suit une <u>loi de Bernoulli</u> si elle ne peut prendre que deux valeurs a et b. On a alors $p(X=a)=p$ et $p(X=b)=1-p$.

Schéma de Bernoulli.

Définition IV-3. Un schéma de Bernoulli est une expérience au cours de laquelle on répète <u>n épreuves</u> de Bernoulli <u>identiques</u> et <u>indépendantes</u>.

Exemple 1. On jette un dé et on considère l'évènement S = « obtenir un 6 » : c'est donc une épreuve de Bernoulli. On renouvelle alors 4 fois cette expérience en jetant ce même dé.
Les épreuves sont <u>identiques</u> (chaque succès a la même probabilité à l'issu d'un jet) et sont <u>indépendantes</u> (le résultat d'un lancé n'influence pas le résultat d'un autre).

Exemple 2. On étudie la fiabilité du matériel d'une entreprise et on note S l'évènement « le matériel est défectueux ». On est donc face à une épreuve de Bernoulli.
Si maintenant on pioche au hasard 4 objets de l'entreprise, l'expérience est un schéma de Bernoulli.

Exercice IV-4. En reprenant l'exemple 1 ci-dessus, répondre au question suivante :
1a. Quelle est la probabilité de l'évènement $(S,\overline{S},\overline{S},\overline{S})$?
1b. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un succès ?
2a. Quelle est la probabilité de l'évènement $(S,S,\overline{S},\overline{S})$?
2b. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux succès ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un succès ?

Loi Binomiale.

Définition IV-5. Considérons une épreuve de bernoulli dont <u>le succès a la probabilité p</u>.
Considérons maintenant un schéma de Bernoulli, répétition <u>de n épreuves</u> identiques et indépendantes.
Soit X la variable aléatoire qui <u>compte le nombre de succès</u> à l'issue de ces n épreuves : on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p, notée $B(n,p)$.

Propriété IV-6. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n,p)$.

- X ne peut prendre que des valeurs k entières, comprises entre 0 et n.
- Pour un tel k, on a $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Exercice IV-7. Vérifier que si X suit une loi binomiale $B(n,p)$, on a bien $\sum_{k=0}^{n} p(X=k)=1$.

Propriété (admise).
Pour une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\times p(X=k)=np \text{ et } V(X)=np(1-p).$$

En gros, comme un schéma de Bernoulli est la succession indépendante de n épreuves d'espérance p, E(X) = np… mais la démonstration est plus compliquée que ça…

V. Quelques exercices.

Exercice V-1.

PARTIE A

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.
On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, chacun portant sur des leçons différentes.
Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.
1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul sujet ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?

PARTIE B

On considère maintenant que l'élève a étudié *n* leçons parmi les 100 proposées (*n* est un entier compris entre 0 et 100).
1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

2. Déterminer les entiers *n* tels que p_n soit supérieur ou égal à 0.95 ?

Exercice V-2.
Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été.
On sait que 20% des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière sois défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière sois défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'évènement : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « la chaudière est garantie et défectueuse »
B : « la chaudière est défectueuse »

2. Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80€ si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280€ si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses.
Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

Consultez plus d'exercices, de ds corrigés ou de sujets de Bac sur le site.

Site Mathemitec : http://mathemitec.free.fr/index.php

Corrigé des exercices et Démonstrations.

I. Quelques règles de dénombrement

Corrigé I-2.

1a. On doit donc déterminer le nombre de triplets parmi 12 éléments : il y en a $12\times11\times10=1320$, d'après la formule précédente.
Evidemment, on retrouve le résultat facilement : il y a 12 choix pour le premier cheval, 11 pour le second, et plus que 10 pour le dernier.
1b. De même, il y a $12\times11\times10\times9$ quartés possibles.
2. Le 1er joueur a 6 choix possibles, le second 5…, le dernier 1 seul. Il y a donc $6\times5\times4\times3\times2\times1=7200$ distributions possibles.
Il s'agit aussi du nombre 6-uplets dans un ensemble à 6 éléments : on parle de permutations de 6 éléments.

Corrigé I-3.

Soit N ce nombre de p-listes : on a déjà vu que $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-[p-1])$. On fait donc le produit des entiers entre n et n-(p-1) ; on va par conséquent rajouter ce qui nous manque, pour obtenir le factoriel n.

On a $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)\times\dfrac{(n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times3\times2\times1}{(n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times3\times2\times1}$ et par conséquent, $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Corrigé I-5.

> $A=\dfrac{5!}{3!}=\dfrac{5.4.3.2.1}{3.2.1}=5.4=20$.

> $B=4!2!=(4.3.2.1)\times(2.1)=24\times2=48$.

> $C=n(n-1)!=n.(n-1).(n-2)...2.1=n!$.

> $D=\dfrac{n!}{(n-1)!}=\dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!}=n$.

Corrigé I-6.

> $A=4\times5\times6\times\ldots\times10=\dfrac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\times10}{1\times2\times3}=\dfrac{10!}{3!}$.

> De même, $B=n(n+1)(n+2)=\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ et $C=\dfrac{6\times5}{3\times2}=\dfrac{6\times5}{3!}=\dfrac{6!}{3!4!}$.

Corrigé I-7.

- Faisons comme si les 5 lettres étaient différentiables, en notant par exemple A_1 et A_2 les deux lettres A : il y a donc 5! mots possibles.
  Cependant, il y a deux A, identiques : il y a 2! = 2 façons de les permuter. On a donc compté deux fois trop de mots.
  Il y a ainsi $\dfrac{5!}{2!}=60$ anagrammes possibles.

- De même, il y a 11! permutations de 11 lettres distinctes :
  > il y a 3 I donc 3! permutations de I possibles donc 3! fois trop de mots comptés précédemment.
  > il y a 2 N donc 2! permutations de N possibles donc 2! fois trop de mots comptés précédemment.
  Ainsi, il y a $\dfrac{11!}{2!3!}$ anagrammes possibles, soit environ 3 millions !

Corrigé II-2.

1. Un binôme est ensemble 2 élèves de la classe. Il y en a donc $\binom{30}{2}=\frac{30\times 29}{2}=435$ possibles.

2. > Cette fois ci, on doit choisir un garçon parmi 18 : $\binom{18}{1}=18$ choix possibles.

> De même, il y a 12 façons de choisir une filles.

Il y a donc $\binom{18}{1}\times\binom{12}{1}=18\times 12=216$ binômes possibles.

Pourquoi multiplie-t-on devait vous penser pour certains ?? Deux façons de voir les choses :
<u>1ère façon</u> : on veut choisir un garçon **et** une fille. Comme ces choix sont bien entendus indépendants, en terme probabiliste p(A et B) = p(A)p(B) d'où le produit.
<u>2ème façon</u> : on imagine un arbre.
Il y a 18 branches car 18 choix pour les garçons, et chaque branche en possède 12 pour le choix d'une fille, d'où le produit.

Corrigé II-3.

> Il y $\binom{49}{6}$ façons de choisir 6 boules parmi 49, soit environ 14 millions…

> Il y a $\binom{8}{5}=56$ formations différentes.

> Il y a 11 nombres entiers entre 0 et 10. Cependant, comme on veut former un trinôme, le coefficient a doit être non nul, donc il y a seulement 10 choix pour a.
Le nombre total de tels trinômes est donc $\binom{10}{1}\times\binom{11}{1}\times\binom{11}{1}=10\times 11^2=1210$.

III. Propriétés des combinaisons

Corrigé III-1.

> $A=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2}=7\times 5=35$: il y a 35 façons de choisir 3 éléments parmi 7.

> $B=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!3!}$: tiens, B = A ! (point d'exclamation, pas factoriel…)

> $C=\binom{10}{0}=\frac{10!}{0!10!}=1$ puisque 0 ! = 1, par convention : il y a une seule façon de choisir 0 élément parmi 10 … ne rien choisir…

> $D=\binom{100}{2}=\frac{100!}{2!98!}=\frac{100\times 99}{2}=\frac{9900}{2}=4950$.

> $E=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1$, puis $F=\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}=1$ et $G=\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$.

> Enfin $H=\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$: et comme une combinaison est un entier, on retrouve un résultat connu en arithmétique, le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

Démonstration III-2.

- <u>Justification ensembliste</u> : p parmi n représente le nombre de façons de choisir p éléments parmi n. Mais il y a autant de choix de ces p éléments que de choix des autres restants, les n-p !
  Donc $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$.
- <u>Justification algébrique</u> : on a $\binom{n}{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}$ donc $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$.

Démonstration III-3.

L'idée générale est que n ! = n.(n-1) !. On a $\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}=\frac{n(n-1)!}{p(p-1)!((n-1)-(p-1))!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$.

Démonstration III-4.

- <u>Justification ensembliste</u> : Soit a un élément de E qui contient n éléments. On cherche à compter le nombre de parties de E à p éléments.
  Parmi ces parties de E à p éléments, il y a celle qui contiennent a, et les autres.
  > De parties à p éléments qui contiennent a, il y en a $\binom{n-1}{p-1}$ puisque on a déjà choisit a donc on n'a plus qu'à choisir p-1 éléments parmi n-1.
  > De parties à p éléments qui ne contiennent pas a, il y en a $\binom{n-1}{p}$ puisque on a p éléments à choisir parmi n-1, tous les éléments sauf a.
  > En sommant ces deux nombres, on obtient le résultat cherché.
- <u>Justification algébrique</u>, *attention aux yeux…*

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}=\frac{p}{p}\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\times\frac{n-p}{n-p}$$

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}=\frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!}=\frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration III-5.

Présentons deux types de démonstrations, une jolie et l'autre !

- <u>Méthode ensembliste :</u>

Pour plus de lisibilité, posons x = a et $P(x)=(x+b)^n$.

P est un polynôme de degré n, il est donc composé de monôme de la forme $c_k x^k$ où k va de 0 à n.

Rappelons maintenant que par définition de la puissance (entière) : $P(x)=\underbrace{(x+b)\times(x+b)\times\ldots\times(x+b)}_{n\ termes}$.

Déterminons un à un les coefficients de ces monômes :

- x^0 : il n'y a donc que des termes constants et la seule façon que les n multiplications précédentes ne contiennent aucun x est de choisir n fois le terme b.
  Le coefficient constant est donc b^n.
- x^1 : dans les n multiplications par (x+b), il a donc fallu choisir une fois x (donc x apparaît) et n-1 fois b (donc b^{n-1} apparaît).
  Il y a $\binom{n}{1}$ choix différents de x donc le terme est $\binom{n}{1}x^1b^{n-1}$.

- x^2 : dans les n multiplications par (x+b), il a donc fallu choisir deux fois x (donc x² apparaît) et n-1 fois b (donc b^{n-2} apparaît).
  Il y a $\binom{n}{2}$ choix différents de x donc le terme est $\binom{n}{2}x^2b^{n-2}$.
- …
- x^k : dans les n multiplications par (x+b), il a donc fallu choisir k fois x (donc x^k apparaît) et n-k fois b (donc b^{n-k} apparaît).
  Il y a $\binom{n}{k}$ choix différents de x donc le terme est $\binom{n}{k}x^kb^{n-k}$.
- En additionnant chaque monôme, on obtient bien le résultat voulu. □

➢ Méthode algébrique : bon et bien démontrons ce résultat par récurrence…

Soit P(n) la proposition P(n) : « $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ ».

> P(0) est vraie puisque $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{p=0}^{0}\binom{0}{p}a^{0-p}b^p = a^0b^0 = 1$.

> Supposons la propriété P(n) vraie au rang n. Calculons $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n\right) \text{ donc}$$

$$(a+b)^{n+1} = a\left(a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n\right) + b\left(a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n\right).$$

Regroupons maintenant les monômes de la forme a^pb^{n-p} :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + a^nb^1\left[\binom{n}{1}+1\right] + a^{n-1}b^2\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right] + \ldots + a^{n+1-k}b^k\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right] + \ldots + b^{n+1}.$$

Mais d'après la formule du binôme, on a $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ et par conséquent,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + a^{n+1-1}b^1\binom{n+1}{1} + a^{n+1-2}b^2\left[\binom{n+1}{2}\right] + \ldots + a^{n+1-k}b^k\left[\binom{n+1}{k}\right] + \ldots + b^{n+1}.$$

Ouf ! On vient d'obtenir P(n+1) !

La propriété P(n) est donc vraie pour tout n.

Corrigé III-6.

> $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

> $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Remarquez la symétrie des coefficients ainsi que la somme des degrés des monômes qui fait toujours 4.

Corrigé III-7.

> A l'aide de la formule précédente, $(2+i)^4 = 2^4 + 4\times2^3i + 6\times2^2i^2 + 4\times2i^3 + i^4$ donc on a $(2+i)^4 = 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i$.

> Cette astuce est au moins à voir une fois : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^{k}=(1+1)^{n}=2^{n}$.

> Celle la aussi : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^{k}=(1-1)^{n}=0$.

Corrigé III-8.

On a $\sin^{3}(x)=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{3}=\dfrac{1}{(2i)^{3}}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^{3}=-\dfrac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^{3}$.

A l'aide de la formule du binôme, on a :

$$\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^{3}=\left(e^{ix}\right)^{3}+3\left(e^{ix}\right)^{2}\left(-e^{-ix}\right)+3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^{2}+\left(-e^{-ix}\right)^{3}$$

$$\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^{3}=e^{3ix}-e^{-3ix}+3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=2i\sin(3x)+3\times 2i\sin(x).$$

Par conséquent,

$$\sin^{3}(x)=-\frac{1}{4}\left(\sin(3x)+3\sin(x)\right).$$

Une primitive de $\sin^{3}(x)$ est alors donnée par $-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\cos(3x)}{3}-3\cos(x)\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\cos(3x)}{3}+3\cos(x)\right)$.

IV. Loi Binomiale

Corrigé IV-4.

1a. Les évènements étant identiques, chaque succès a la probabilité p (=1/6) de se produire. Par indépendance, $p\left(S,\overline{S},\overline{S},\overline{S}\right)=p(1-p)^{3}$.

1b. Pour avoir exactement un succès, il suffit de choisir quand aura lieu le succès, cad à quel jet : il y a 4 façons de faire ce choix donc $p(\text{"exactement 1 } S\text{"})=4p(1-p)^{3}$.

2a. Toujours par indépendance, $p\left(S,S,\overline{S},\overline{S}\right)=p^{2}(1-p)^{2}$.

2b. Comme dans le 1b, il faut choisir à quels jets on aura les deux succès : nous devons donc choisir 2 jets parmi 4, il y a $\binom{4}{2}=6$ façons de le faire.

Ainsi, $p(\text{"exactement 2 } S\text{"})=\binom{4}{2}p^{2}(1-p)^{2}$.

3. Soit A l'évènement « avoir au moins un succès » ; $\overline{A}$ représente donc l'évènement « que des échecs » donc $p\left(\overline{A}\right)=(1-p)^{4}$, par indépendance. Ainsi $p(A)=1-(1-p)^{4}$.

Corrigé IV-6.

Comme X compte le nombre de succès, elle peut prendre toute valeur entière comprise entre 0 et n. Déterminons P(X=k), cad la probabilité d'avoir exactement k succès :

> déjà, choisissons quand auront lieu les k succès : il y a n épreuves au total, donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir k succès parmi n épreuves.

> les k succès étant choisis, et les épreuves étant identiques et indépendantes, la probabilité d'avoir k succès est p^{k}.

Maintenant, il reste n-k échecs : la probabilité d'avoir n-k échecs est $(1-p)^{n-k}$.

> On a alors, par indépendance, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$.

Corrigé IV-7.

On a $\sum_{k=0}^{n}p(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$: d'après la formule du binôme de Newton, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} p(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1 .$$

V. Quelques exercices.

Corrigé V-1.

PARTIE A

100 leçons sur 100 papiers : un élève en a étudié 50. Tirage simultané de deux papiers (donc sans remise).

1. Soit A l'évènement « ne connaître aucun sujet ».

Méthode 1 : on suppose **qu'il n'y pas de notion d'ordre** dans le tirage des sujets (c'est le cas) : on cherche le nombre de parties de 2 éléments dans un ensemble à n éléments (2 parmi 100) : il y a donc 4950 possibilités.
Vu qu'il connaît 50 leçons, il y a 2 parmi 50 « couples » (pas vraiment sans ordre) de leçons qui l'arrangent, soit 1225.
Ainsi, $p(A)=\frac{1225}{4950}=\frac{49}{198}\approx 24,7\%$.
Méthode 2 : on suppose **une notion d'ordre** dans le tirage des sujets : il y a donc 100*99 couples de sujets (nombre de 2-liste dans un ensemble à n éléments).
Vu qu'il connaît 50 leçons, il y a 50*49 couples de leçons qui l'arrangent.
Ainsi, $p(A)=\frac{50\times 49}{100\times 99}=\frac{49}{198}\approx 24,7\%$

2. Soit B l'évènement « il connaît les deux sujets ».

Méthode 1 : on suppose **qu'il n'y pas de notion d'ordre** dans le tirage des sujets (c'est le cas) : l'univers a encore 4950 éléments.
Vu qu'il ne connaît pas 50 leçons, il y a 2 parmi 50 « couples » (pas vraiment sans ordre) de leçons qui le dérangent, soit 1225.
Ainsi, $p(B)=\frac{1225}{4950}=\frac{49}{198}\approx 24,7\%$.
Méthode 2 : on suppose **une notion d'ordre** dans le tirage des sujets : l'univers a encore 100*99 éléments.
Vu qu'il ne connaît pas 50 leçons, il y a 50*49 couples de leçons qui le dérangent.
Ainsi, $p(B)=\frac{50\times 49}{100\times 99}=\frac{49}{198}\approx 24,7\%$

3. Soit C l'évènement « connaître exactement un sujet » (et donc ignorer l'autre)

Méthode 1 : on suppose **qu'il n'y pas de notion d'ordre** dans le tirage des sujets (c'est le cas) : l'univers a encore 4950 éléments.
Il y a 1 parmi 50 façons de choisir le sujet qu'il connaît (cad 50) et aussi 50 façons de choisir un sujet non connu, donc au total 50*50 possibilités.
Ainsi, $p(C)=\frac{50^2}{4950}=\frac{50}{99}\approx 50,5\%$.
Méthode 2 : on suppose **une notion d'ordre** dans le tirage des sujets : l'univers a encore 100*99 éléments.
Il y a encore 50*50 couples (sujet ok, sujet pas ok) : on doit donc multiplier par 2 ce résultat pour comptabiliser les couples (sujet pas ok, sujet ok).
Ainsi, $p(C)=2\times\frac{50\times 50}{100\times 99}=\frac{50}{99}\approx 50,5\%$

3. Soit D l'évènement « connaître au moins un sujet ».

Méthode 1 : on remarque que $D=\overline{A}$ et donc $p(D)=p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)=\frac{149}{98}\approx 75,2\%$.

Méthode 2 : on remarque que $D=B\cup C$ **(évènements disjoints)** et donc
$p(D)=p(B)+p(C)=\frac{49}{198}+\frac{50}{99}=\frac{149}{98}\approx 75,2\%$.

PARTIE B.

On suppose que l'élève a étudié n des 100 leçons. Soit E l'évènement « connaître au moins un sujet »
L'évènement contraire est l'évènement « ne connaître aucun sujet ».

1. On reprenant la méthode 1, on trouve que $p\left(\overline{E}\right)=\frac{\binom{100-n}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{(100-n)\times(99-n)}{100\times 99}$: ainsi,

$p_n=1-\frac{(100-n)\times(99-n)}{100\times 99}=\frac{n(199-n)}{100\times 99}$.

2. On cherche n tel que $p_n\geq 0,95\Leftrightarrow n(199-n)\geq 9405$ (on pourrait utiliser les résultats sur les trinômes mais contentons nous de tracer la courbe d'équation y = n (199 – n) et de lire le résultat graphiquement.
On trouve $n\geq 78$.
L'élève peut donc se permettre de faire l'impasse sur moins de 22 leçons...

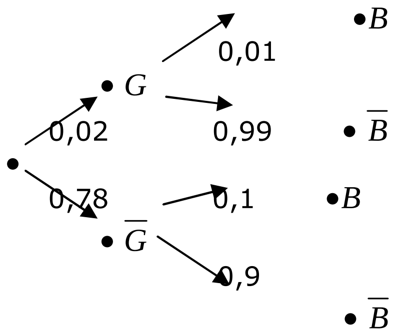
Corrigé V-2.

$\rightarrow$ **Faite un arbre pondéré** : en général, les calculs avec des probabilités conditionnelles s'y prêtent.

Par lecture de l'énoncé :

G : « être sous garantie » : p(G) = 20%
B : « être défectueux »
$p_G(B)=1\%$ et $p_{\overline{G}}(B)=10\%$

d'où l'arbre suivant :



1. $\rightarrow$ A : « garantie et défectueux » donc $A=G\cap B$.
On a donc $p(A)=p(B\cap G)=p(G)\times p_G(B)=0,2\times 0,01=0,002=0,2\%$.

$\rightarrow$ On utilise alors la formule des probabilités totales puisque G et $\overline{G}$ forment une partition :

$$\begin{aligned}p(B)&=p(B\cap G)+p\left(B\cap\overline{G}\right)=p(G)\,p_G(B)+p\left(\overline{G}\right)p_{\overline{G}}(B)\\&=0,2\times 0,01+0,8\times 0,1=0,082=8,2\%\end{aligned}.$$

2. $p(G\mid B)=\frac{p(B\cap G)}{p(B)}=\frac{0,2\%}{8,2\%}=\frac{2}{82}=\frac{1}{41}$.

3. Contrôle effectué : G $\to$ 0€

$\overline{G}\cap\overline{B}$ $\to$ 80€

$\overline{G}\cap B$ $\to$ 280€

X la v.a. qui désigne le coût du contrôle d'une chaudière.

Déterminer la loi de a v.a. X signifie déterminer la probabilité de chaque valeur possible de X : X prend les valeurs 0 ; 80 et 280.

$p(X=0)=p(G)=0,2$

$p(X=80)=p\left(\overline{G}\cap\overline{B}\right)=0,8\times0,9=0,72$ (à l'aide d'un arbre)

$p(X=280)=p\left(\overline{G}\cap B\right)=0,8\times0,1=0,08$ (à l'aide d'un arbre)

On rappelle que l'espérance de X est donnée par la formule : $E(X)=\sum_i x_i p(X=x_i)$

Ici, nous avons donc E(X) = 0.p(X=0) + 80.p(X=80) + 280.p(X=280)
Soit E(X) = 80 : en moyenne, le coût de contrôles d'une chaudière est de 80€.

4. Désignons par Y la va qui compte le nombre de chaudières sous garantie : on peut supposer que le fait qu'une chaudière défectueuse soit sous garantie est indépendant du fait qu'une autre chaudière défectueuse soit sous garantie. Y suit donc une loi binomiale de paramètre n=5 et $p=p(G\mid B)=\frac{1}{41}$. On a donc $p(Y=k)=\binom{5}{k}\frac{1}{41^k}\frac{40^{5-k}}{41^{5-k}}=\binom{5}{k}\frac{40^{5-k}}{41^5}$

On veut déterminer $p(Y\geq1)$: passons par l'évènement contraire Y = 0.

p(Y=0) = $\left(\frac{40}{41}\right)^5\approx0,884$ et donc $p(Y\geq1)$ = 1 – p(Y=0) = 11,6%