1. Exercice 1 (4 pts)

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x}{e^x-1}=x\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)\,dx=3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)dx$.

c. Montrer que si $1\le x\le 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\le\ln\left(1-e^{-x}\right)\le\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)dx$, puis de $\int_1^3 f(x)\,dx$.

2. Exercice 2 (5 pts, non spécialistes)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C. Alors

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{CB}{CA}\ \text{ et }\ \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi).$$

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel : $z=e^{i\theta}$ si et seulement si $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+k2\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E=r(A)$ et $F=r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

3. Exercice 2 (5 pts, spécialistes)

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.

Démontrer que si A,B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument-de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B , z_C et z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c. Déterminer le milieu du segment [AC], celui du segment [BD]. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

4. Exercice 3 (4 pts)

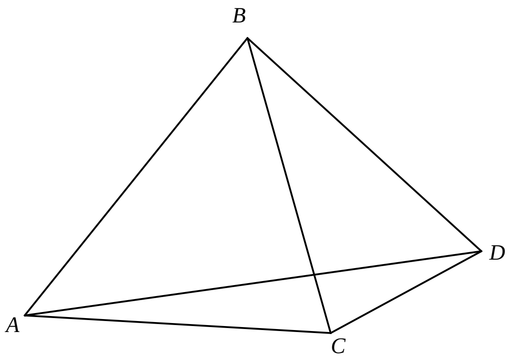
On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.



b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année *n*.

On pose *n* = 0 en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout *n* >0, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 20] par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.

a. Étudier les variations de *f* sur [0 ; 20].

b. En déduire que pour tout $x \in$ [0 ; 20], $f(x) \in$ [0 ; 10].

c. On donne ci-dessous la courbe représentative C de la fonction *f* dans un repère orthonormal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n>0}$ sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année *x*.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et *g* est une solution qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

(E) : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$.

1. On considère une fonction *y* qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que *y* est solution de (E) si et seulement si *z* est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) :\ z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

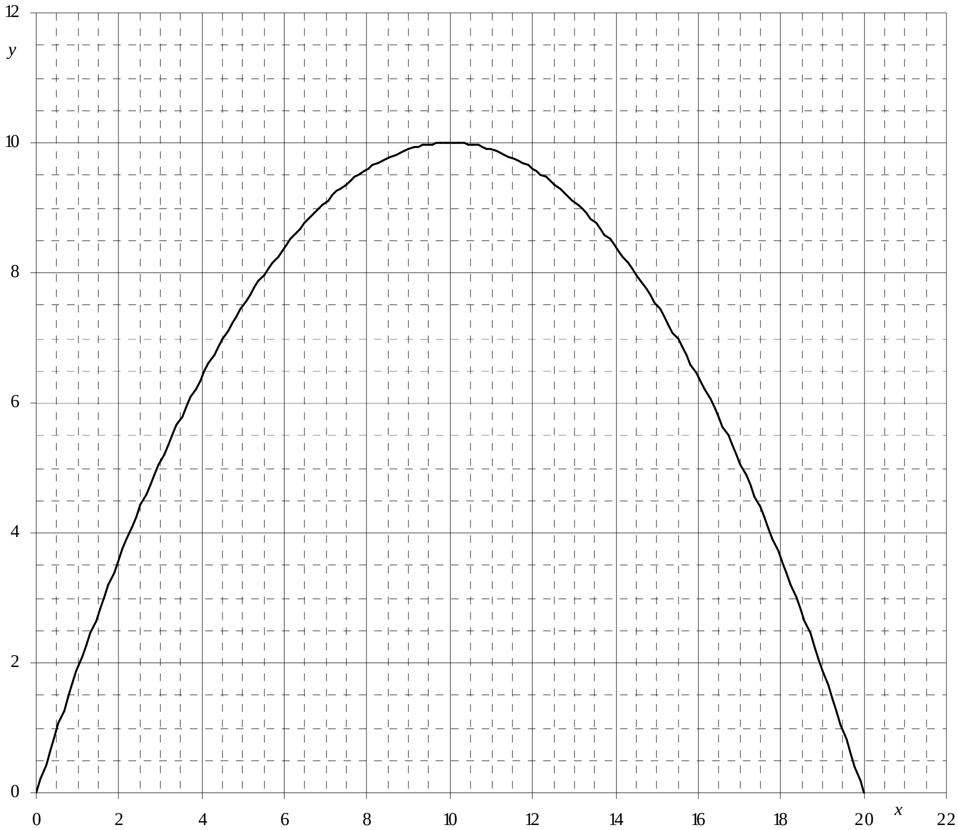
b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que *g* est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de *g* sur $[0\,;+\infty[$.

4. Calculer la limite de *g* en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?


12
y
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x
22

Exercice 1

1. Soit *f* la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ et soit *H* la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

1a. Pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$, $e^x-1>0$ donc f est définie. De plus sur cet intervalle, la fonction est continue comme quotient de fonctions continues (à dénominateur non nul). La fonction primitive H est donc définie.

1b. Par définition, H est la primitive de f qui s'annule en 1. On a donc H' = f.

1c. La fonction f est clairement positive sur [1 ;3]. H(3) peut donc s'interpréter comme l'aire géométrique (en unités d'aires) du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe C et les droites verticales d'équation x = 1 et x = 3.

2a. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{x}{e^x-1}\times\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}=\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=x\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ puisque $e^{-x}e^x=e^0=1$.

2b. Nous allons appliquer une intégration par parties (toutes les fonctions sont à dérivée continue donc c'est licite).

On a $\begin{cases} u=x \\ v'=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{(1-e^{-x})'}{1-e^{-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=\ln(1-e^{-x}) \end{cases}$ donc $\int_1^3 f(x)\,dx=[x\ln(1-e^{-x})]_1^3-\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx$ et on a

donc bien $H(3)=\int_1^3 f(x)\,dx=3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx$.

2c. Pour tout x compris entre 1 et 3, la fonction $x\mapsto\ln(1-e^{-x})$ est croissante comme composée des fonctions décroissantes $x\mapsto e^{-x}$ et $X\mapsto -X$ et de la fonction croissante $U\mapsto\ln(1+U)$ (dériver si vous n'êtes pas convaincus !).

Ainsi, par croissance de la fonction sur [1 ;3] si $1\le x\le 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\le\ln(1-e^{-x})\le\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

2d.

> D'après les relations d'ordre liée à l'intégration, en intégrant chaque membre de l'encadrement ci-dessus, on obtient $\int_1^3\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)dx\le\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx\le\int_1^3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)dx$ cad

$\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\underbrace{\int_1^3 dx}_{3-1}\le\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx\le\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)\underbrace{\int_1^3 dx}_{3-1}$ soit $2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\le\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx\le 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

> Pour plus de clarté, notons $a=\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$, $b=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$: nous avons donc $2a\le\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx\le 2b$.

Cherchons à encadrer $H(3)=3b-a-\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx$: on a $-2b\le-\int_1^3\ln(1-e^{-x})\,dx\le-2a$ donc $b-a\le H(3)\le 3(b-a)$.

Exercice 2 (non spécialistes)

Partie A

Soit r la rotation d'angle α et de centre Ω d'affixe ω, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

Pour tout point M distinct du centre, par définition $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$ cad $\begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$.

Posons $Z = \dfrac{z' - w}{z - w}$: les relations précédentes s'écrivent $\begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) = \theta \end{cases}$ d'après le pré requis 1.

D'après le pré requis 2, on a alors $Z = \dfrac{z' - w}{z - w} = e^{i\theta}$ cad $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

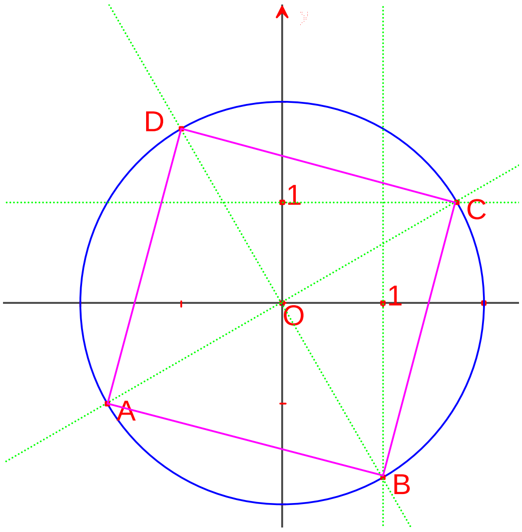
Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1a. $z_A = -\sqrt{3} - i = -2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ $\qquad z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\overline{\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = 2\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_C = \sqrt{3} + i = -z_A = e^{i\pi}z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\qquad z_D = -z_B = e^{i\pi}z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1b. Déjà, tous ces points se trouvent sur le cercle E de centre O et de rayon 2.



- pour tracer B, on trace la verticale d'équation x = 1, et on prend son intersection avec le cercle E d'ordonnée négative.
- D est son symétrique par rapport à O.
- pour tracer C, on trace l'horizontale d'équation y = 1, et on prend son intersection avec le cercle E d'ordonnée positive.
- A est son symétrique par rapport à O.

1c. Il semble que ABCD soit un carré (direct).

- Par définition de la symétrie de centre O, O est le milieu des diagonales [BD] et [AC].
- De plus ces diagonales se coupent perpendiculairement puisque $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right)$ mais

par définition de l'argument d'un complexe, on a $-\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = -\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right) = \arg(z_C) = \dfrac{\pi}{6}$ donc on obtient $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. ABCD est donc bien un carré (→ **voir question 1c de l'exercice qui suit pour une démonstration par les affixes**).

2a. Construisons E par exemple : il s'agit donc de construire un triangle équilatéral BAE dans le sens indirect.

- on trace d'abord le cercle de centre B et de rayon BA.
- On trace ensuite, au compas et à la règle, la médiatrice de [BA].
- Le point E est alors le point d'intersection du cercle et de la médiatrice tel que le triangle BAE soit dans le sens indirect.

2b. D'après le cours, on sait que $z'-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z-z_B\right)$ où M(z) est envoyé sur M'(z') et $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2c. Comme E est l'image de A, $z_E=2e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{7\pi}{6}}-2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\frac{5\pi}{6}}-2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Revenons à la forme trigonométrique de ces complexes : $z_E=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\sqrt{3}+i$.

Exercice 2 (spécialistes)

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application *f* du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si *f* admet une écriture complexe de la forme $z'=az+b$, où $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.

Soient *A*,*B*, *A'* et *B'* quatre points tels que *A* est distinct de *B* et *A'* est distinct de *B'* : formons le système $\begin{cases}z_{A'}=az_A+b\\ z_{B'}=az_B+b\end{cases}$ d'inconnues a et b. Pour prouver qu'il existe une unique similitude s qui envoie A sur A' et B sur B', on va prouver qu'il existe un unique couple (a,b) solution du système.

- soit on connaît la notion de déterminant d'un système et ici le déterminant est $\begin{vmatrix}z_A & 1\\ z_B & 1\end{vmatrix}=z_A-z_B$ qui est non nul par hypothèse, d'où la conclusion cherchée.
- Sinon, on le résout !

$\begin{cases}z_{A'}=az_A+b\\ z_{B'}=az_B+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_{A'}=az_A+b\\ z_{B'}-z_{A'}=a\left(z_B-z_A\right)\ \left(L_2-L_1\right)\end{cases}$: comme $z_B-z_A\neq 0$ on a $(S)\Leftrightarrow\begin{cases}z_{A'}=az_A+b\\ a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}\end{cases}$ et finalement

$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_{A'}-az_A\\ a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}\end{cases}$: a et b sont bien définis de manière unique.

Partie B

1a. 1b. Voir la correction de l'exo des non spé.

$z_A=-\sqrt{3}-i=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$z_B=1-i\sqrt{3}=2\overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=2\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_C=\sqrt{3}+i=-z_A=e^{i\pi}z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_D=-z_B=e^{i\pi}z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1c. Le milieu du segment [*AC*] a pour affixe $\frac{z_A+z_C}{2}=0$ donc c'est l'origine, de même que celui du segment [*BD*].

Calculons le quotient $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}=e^{-i\frac{9\pi}{6}}=e^{-i\frac{3\pi}{2}}=i$.

→ ABCD est donc un carré : ses diagonales se coupent en leur milieu O et elles sont perpendiculaires puisque $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

2a. g est une similitude de rapport $\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=1$, d'angle $\arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=-\frac{\pi}{3}$ et de centre d'affixe w telle que $w=e^{-i\frac{\pi}{3}}w+2 \Leftrightarrow w=\dfrac{2}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=...=1-i\sqrt{3}=z_B$. B est donc son centre et on peut remarquer que g est une rotation.

2b. Voir exo de non spé.

2c. On sait que O est le milieu de [AC] : une similitude conservant les milieux, on peut en conclure que J est le milieu de [EF].

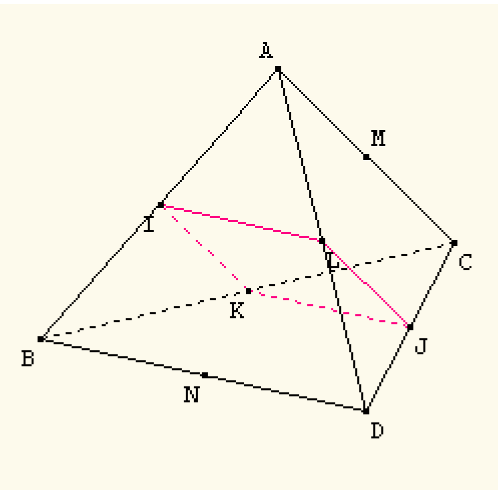
Exercice 3

1. Tout réside dans l'associativité du barycentre. Par hypothèse, G est barycentre de (A,1) (B,1) (C,1) (D,1).

- comme I milieu de [AB], I est barycentre de (A,1)(B,1) ; de même J barycentre de (C,1)(D,1).
- Par associativité du barycentre, G est barycentre de (I,2)(J,2) : c'est donc le milieu de [IJ] donc un point de (IJ).
- On montre de la même façon que G est le milieu de [KL] et [MN] et en particulier, G est bien le point de concours de (IJ), (KL) et (MN).

Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre *ABCD* est équifacial car ses faces sont isométriques).

2a.



> *IKJL* est un **losange**, en effet, d'après le théorème des milieux dans le triangle ABD, on a $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. De même, dans BDC, $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

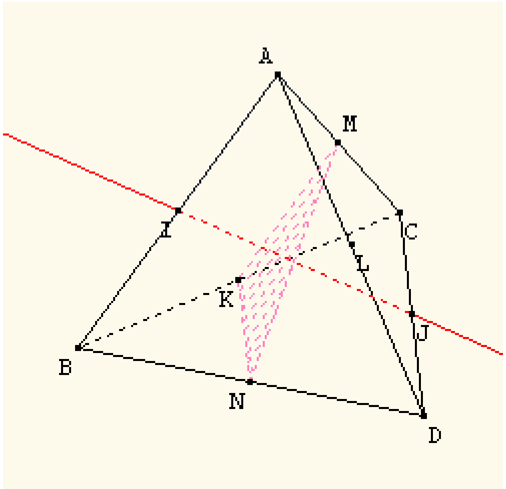
<u>Première conclusion</u> : $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{KJ}$ donc *IKJL* est un parallélogramme.

Enfin, dans ABC, on a $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et dans ADC, on a $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Comme par hypothèse BD = AC, on a ainsi $IL=KJ=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=IK=LJ$: les 4 cotés du plg sont de même longueur, *IKJL* est bien un losange.

> on montrerait de même que *IMJN* et *KNLM* sont des losanges.

2b. Les diagonales d'un losange sont orthogonales donc (*IJ*) et (*KL*) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (*IJ*) et (*MN*) sont orthogonales et les droites (*KL*) et (*MN*) sont orthogonales.

3a. Pour montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN), il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux sécantes de (MKN).



1. Montrons que (KL) est incluse dans le plan (MKN).

2. Montrons que (IJ) est orthogonale aux deux sécantes (KL) et (MN) du plan (MKN).

1. D'après le 2a, KNLM est un losange donc en particulier les points K N L et M sont coplanaires : L est donc bien un point de (MKN) et comme K aussi, la droite (KL) est incluse dans le plan.

2. D'après le 2b, (IJ) et (KL) sont orthogonales, de même que les droites (IJ) et (MN).

La conclusion cherchée découle de la propriété énoncée ci-dessus.

3b. Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan donc, comme (MK) est dans (MKN), la question précédente assure que (IJ) et (MK) sont orthogonales. Ainsi $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0$.

D'après le théorème des milieux $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: ainsi $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 0$: ainsi (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

<u>Même raisonnement</u> : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ML} = 0$ d'après le 3a, et comme $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = 0$: ainsi (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

3c. Le plan médiateur à [AB] est le plan orthogonale à (AB) qui passe par son milieu I. Comme (IJ) est orthogonale à (AB) et passe par I, (IJ) est incluse dans le plan médiateur.

Mais d'après la première question, G appartient à (IJ) donc G est dans le plan médiateur à [AB].

On montre par le même type de raisonnement que G appartient au plan médiateur de [CD].

3d. G est dans le plan médiateur de [AB] donc GA = GB. G est dans le plan médiateur de [CD] donc GC = GD.

En faisant un raisonnement semblable avec la droite (MN) qu'avec la droite (IJ), on montrerait que GB = GD et GA = GC.

On a donc GA = GB = GC = GD ce qui assure que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 4

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose n = 0 en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout n >0, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 20] par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x) = \frac{1}{10}(20x - x^2)$.

1a. f est dérivable et on a $f'(x)=\frac{1}{10}(20-2x)=\frac{1}{5}(10-x)$ qui est négative sur [10 ; 20] et positive sur [0 ; 10].

f est donc décroissante sur [10 ; 20] et croissante sur [0 ; 10].

1b. Traçons le tableau variations de f sur [0 ; 20].

x	0		10		20
f '(x)		+	0	-	
f (x)	0	↗	10	↘	0

Ainsi, d'après le tableau de variations de f, pour tout $x\in$ [0 ; 20], $f(x)\in$ [0 ; 10].

1c. Voir votre cours.

2. Soit P(n) la proposition « $0\le u_n\le u_{n+1}\le 10$ ».

> $u_0=1$ et $u_1=f(u_o)=1.9$ donc P(0) est vraie.

> supposons P(n) vraie au rang n cad que $0\le u_n\le u_{n+1}\le 10$. Comme f est croissante sur [0 ;10], on en déduit que $f(0)\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le f(10)$ cad que $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 10$: P(n+1) est donc vraie.

Ainsi, pour tout n entier naturel, P(n) est vraie.

3.

> La suite est croissante, majorée par 10 donc elle converge. Notons L sa limite. On a bien sûr $0\le L\le 10$.

> Comme $u_{n+1}=f(u_n)$, comme f est continue sur [0 ;10], elle est continue en L : d'après le cours, lorsque la suite converge elle converge forcément vers un point fixe de f.

Etudions donc L = f(L) $\Leftrightarrow 20L-L^2=10L\Leftrightarrow L(10-L)=0\Leftrightarrow L=0 \text{ ou } L=10$.

> Mais la suite croît donc $u_n\ge u_0=1$ pour tout n donc $L\ge 1$: L ne peut donc être nul, L = 10.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x=0$ en 2005, $g(0)=1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'=\frac{1}{20}y(10-y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $z=\frac{1}{y}$.

1a. z est solution de l'équation différentielle (E_1) : $z'=-\frac{1}{2}z+\frac{1}{20}$

$$\Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{y}+\frac{1}{20}\overbrace{\Leftrightarrow}^{y\neq 0}-y'=\frac{1}{20}\left(y^2-10y\right)\Leftrightarrow y'=\frac{1}{20}y(10-y)\text{ ssi y sol de (E).}$$

2. > Les solutions de (E1) sont les fonctions définies par $z(x)=Ke^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{10}$.

> Comme g(0) = 1 on a z(0) = 1 et $K=\frac{9}{10}$.

Ainsi $z(x)=\frac{1}{10}\left(9e^{-\frac{x}{2}}+1\right)$ donc $g(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{10}{9e^{-\frac{x}{2}}+1}$.

3. g est dérivable et on a $g'(x)=10\frac{\frac{9}{2}e^{-\frac{x}{2}}}{\left(9e^{-\frac{x}{2}}+1\right)^2}$: comme une exponentielle est toujours positive, g' est positive sur I donc g croit sur I.

4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=10$.

Cela signifie qu'à terme, cad pour un grand nombre d'années, le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat sera proche de 10 millions, suivant ce modèle (même résultat avec les suites d'ailleurs).

5. On veut résoudre l'équation $g(x)\geq 5$ ssi $\frac{10}{9e^{-\frac{x}{2}}+1}\geq 5 \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{exp>0}} 10\geq 45e^{-\frac{x}{2}}+5 \Leftrightarrow 9e^{-\frac{x}{2}}\leq 1 \Leftrightarrow (0<)e^{-\frac{x}{2}}\leq\frac{1}{9}$.

Comme la fonction logarithme est croissante pour x > 0, $g(x)\geq 5\Leftrightarrow -\frac{x}{2}\leq -\ln(9)\Leftrightarrow x\geq 2\ln(9)$ soit à partir de la cinquième année donc dès 2010.