

Durée : 4 h. Calculatrices et formulaires autorisés. RESPECTER les consignes.

Exercice I (4 pts) : Quelques questions sur les nombres complexes.

Dans un repère orthonormé (O, U, V), les points A, B et C ont pour coordonnées, respectivement $(-1 - \sqrt{3}; 1)$, $(-1; 2)$ et $(-1; -2)$.

- 1) Les affixes de B et C sont les racines d'un polynôme $P(z)$ du second degré en z , à coefficients réels, et tel que le coefficient du terme de plus haut degré soit 1. Sur la feuille réponse, écrire ce polynôme sous forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de z (les calculs ne seront pas présentés).
- 2) Sur la feuille réponse, écrire $\frac{b-a}{c-a}$ (a, b et c sont les affixes de A, B et C respectivement) sous forme exponentielle (les calculs ne seront pas présentés).
- 3) En déduire la nature du triangle ABC et les mesures, en degrés, de chacun de ses angles.

Exercice II (4 pts)

1) Parmi les fonctions suivantes, définies sur \mathbf{R} , entourer sur la feuille réponse celles vérifiant l'équation $9y'' + y = 0$.

$A \cos 3x + B \sin 3x$	$B \sin \frac{x}{3}$	$A \cos \frac{x}{3} + B \sin \left(-\frac{x}{3}\right)$	$A \cos 3x$	$2 \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{3}$
-------------------------	----------------------	---	-------------	--

- 2) On appelle f la solution de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

On sait que, dans ce cas, pour tout x de \mathbf{R} , on peut écrire $f(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ où α et β sont des constantes réelles et ω une constante strictement positive. Ecrire des valeurs exactes de α, β et ω (les calculs ne seront pas présentés).	$\alpha =$; $\beta =$; $\omega =$
--	-------------------------------------

- 3) A-t-on $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel ? Justifier la réponse.
- 4) Calculer la moyenne de f sur $[0; \pi]$.

Exercice III (12 pts) : autour de l'étude d'une fonction.

Partie A (3 pts)

- 1) Sur la feuille réponse, écrire les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$.
- 2) a) Pour qu'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (a, b et c constantes réelles) soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il suffit que a, b et c soient solution d'un système d'équations. Ecrire ce système (les calculs ne seront pas présentés).
b) Ecrire sur la feuille réponse les définitions, propriétés ou théorèmes essentiels utilisés pour trouver ce système.

Partie B (5 pts)

- 3) On admet que pour qu'une fonction g soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il faut et il suffit que $g(x) = ke^{-3x} + x^2 - 2x - 3$ (k constante réelle). On appelle C la courbe représentative de g . Quelle est l'ordonnée du point de C d'abscisse 0 ? Dans la suite, on choisit k tel que $g(0) = 0$.
- 4) Etude des variations de $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 - 2x - 3$. On admet que $f'(x) = -9e^{-3x} + 2x - 2$.

- a) Une étude permet d'obtenir le tableau ci-contre (f' est strictement croissante, s'annule une et une seule fois en α , et $\alpha \in [0; 2]$, ...).
Présenter une telle étude en justifiant à l'aide des théorèmes clés.

Valeurs de x	$-\infty$	0	α	2	$+\infty$
Sens de variations de $f'(x)$					
Signe de $f'(x)$		-	0	+	

- b) Sur la feuille réponse, écrire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- c) Pour calculer les limites de f aux bornes, on écrit, pour $x \neq 0$, $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$. Sur la feuille réponse écrire ces limites (les calculs ne seront pas présentés), et, aux endroits prévus à cet effet, citer avec précision les théorèmes utilisés.
- d) Ecrire le tableau des variations de f (aucune justification n'est demandée).

Partie C (4 pts)

On appelle E la partie du plan comprise entre C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -0,5$ et $x = 0,5$.

- 5) Quels sont les théorèmes « clés » permettant de calculer le nombre d'unités d'aire de E ?
- 6) a) Sur la feuille réponse, écrire une primitive F de f (les calculs ne seront pas présentés).
b) Sur la feuille réponse, écrire les théorèmes utilisés pour calculer cette primitive.
- 7) Entourer (en complétant éventuellement) la troncature à la deuxième décimale du nombre d'unités d'aire de E :
5,20 ; 3,20 ; 1,34 ; 2,10 ; autre.

NOM :

FEUILLE-REPONSE – RESPECTER LES CONSIGNES

Exercice I : Quelques questions sur les nombres complexes.

Dans un repère orthonormé (O, U, V), les points A, B et C ont pour coordonnées, respectivement $(-1 - \sqrt{3} ; 1)$, $(-1 ; 2)$ et $(-1 ; -2)$.

1) Ecrire $P(z)$ sous forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de z (les calculs ne seront pas présentés).	
2) Ecrire $\frac{b-a}{c-a}$ sous forme exponentielle.	

3) En déduire la nature du triangle ABC et les mesures, en degrés, de chacun de ses angles.

Exercice II

1) Parmi les fonctions suivantes, définies sur \mathbf{R} , entourer celles vérifiant l'équation $9y'' + y = 0$.

$A \cos 3x + B \sin 3x$	$B \sin \frac{x}{3}$	$A \cos \frac{x}{3} + B \sin \left(-\frac{x}{3}\right)$	$A \cos 3x$	$2 \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{3}$
-------------------------	----------------------	---	-------------	--

2) On appelle f la solution de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$ vérifiant
$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On sait que, dans ce cas, pour tout x de \mathbf{R} , on peut écrire $f(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ où α et β sont des constantes réelles et ω une constante strictement positive. Ecrire des valeurs exactes de α , β et ω (les calculs ne seront pas présentés).	$\alpha =$; $\beta =$ $\omega =$
---	--------------------------------------

3) A-t-on $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel ? Justifier la réponse.

--

4) Calculer la moyenne de f sur $[0 ; \pi]$.

NOM :

FEUILLE-REPONSE – RESPECTER LES CONSIGNES


Exercice III : autour de l'étude d'une fonction.

Partie A

1) Ecrire les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$.	
2)a) Pour qu'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (a, b et c constantes réelles) soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il suffit que a, b et c soient solution d'un système d'équations. Ecrire ce système.	
2)b) Définitions, propriétés ou théorèmes essentiels utilisés pour trouver ce système.	

Partie B

On admet que pour qu'une fonction f soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il faut et il suffit que $g(x) = ke^{-3x} + x^2 - 2x - 3$. On appelle C la courbe représentative de g.

3) Quelle est l'ordonnée du point de C d'abscisse 0 ?						
4) Etude des variations de $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 - 2x - 3$. On admet que, pour tout x réel, $f'(x) = -9e^{-3x} + 2x - 2$.						
a) Une étude permet d'obtenir le tableau ci-contre (f' est strictement croissante, s'annule une et une seule fois en α , et $\alpha \in [0 ; 2]$, ...). Présenter <u>au dos de cette feuille</u> une telle étude en justifiant à l'aide des théorèmes clés.	Valeurs de x	$-\infty$	0	α	2	$+\infty$
	Sens de variations de $f'(x)$					
	Signe de $f'(x)$	-		0		+
b) Ecrire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .						

c) Pour calculer les limites de f aux bornes, on écrit, pour $x \neq 0$, $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$.

Limites	Théorèmes (avec précision)
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	
d) Ecrire le tableau des variations de f.	

Partie C

On appelle E la partie du plan comprise entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -0,5$ et $x = 0,5$.

5) Quels théorèmes « clés » permettent de calculer le nombre d'unités d'aire de E ?	
6)a) Ecrire une primitive F de f.	
6)b) Théorèmes utilisés pour calculer F ?	
7) Entourer (en complétant éventuellement) la troncature à la deuxième décimale du nombre d'unités d'aire de E :	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> a) 5,20 c) 2,10 </div> <div> b) 3,20 d) 1,34 e) autre(à compléter) </div> </div>

Eléments pour un corrigé.

Exercice I : Quelques questions sur les nombres complexes.

Dans un repère orthonormé (O, U, V), les points A, B et C ont pour coordonnées, respectivement $(-1 - \sqrt{3}; 1)$, $(-1; 2)$ et $(-1; -2)$.

1) Ecrire $P(z)$ sous forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de z (les calculs ne seront pas présentés).	$z^2 + 2z + 5$
2) Ecrire $\frac{b-a}{c-a}$ sous forme exponentielle.	$\frac{\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$
3) Nature du triangle ABC et les mesures, en degrés, de chacun de ses angles.	
<p>On a (th.1) $\arg \frac{b-a}{c-a} = \arg(b-a) - \arg(c-a) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{AC})$ (th.3 et th.2)</p> <p>$= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.</p> <p>Or $\arg \frac{b-a}{c-a} = \pi/2$ (th.4 et cf 2)) donc, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pi/2$ et le triangle ABC est rectangle en A.</p> <p>De plus (cf 2), th.4 et lignes trigonométriques dans un triangle rectangle),</p> <p>$\left \frac{b-a}{c-a} \right = \frac{ b-a }{ c-a } = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \widehat{ACB}$, par suite : $\widehat{BAC} = 90^\circ$, et $\widehat{ACB} = 30^\circ$ et</p> <p>(somme des angles aigus d'un triangle rectangle) $\widehat{ABC} = 60^\circ$.</p>	<p>Th.1 : pour tous z et z' non nuls, $\arg(z/z') = \arg z - \arg z'$ et $z/z' = z / z'$.</p> <p>Th.2 : Dans le repère orthonormé (O, U, V), si $P(z)$ (z non nul) alors $\arg z = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OP})$ et $z = OP$.</p> <p>Th.3 : Si $A(a)$ et $B(b)$ alors $b-a$ est l'affixe de \overrightarrow{AB}.</p> <p>Th.4 : si $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) alors $z = r$ et $\arg z = \theta$.</p>

Exercice II

1) Parmi les fonctions suivantes, définies sur \mathbf{R} , entourer celles vérifiant l'équation $9y'' + y = 0$.

$A \cos 3x + B \sin 3x$	$B \sin \frac{x}{3}$	$A \cos \frac{x}{3} + B \sin \left(-\frac{x}{3}\right)$	$A \cos 3x$	$2 \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{3}$
-------------------------	----------------------	---	-------------	--

2) On appelle f la solution de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

On sait que, dans ce cas, pour tout x de \mathbf{R} , on peut écrire $f(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ où α et β sont des constantes réelles et ω une constante strictement positive. Ecrire des valeurs exactes de α , β et ω (les calculs ne seront pas présentés).	$\alpha = \sqrt{3}; \beta = -1;$ $\omega = 1/3$
---	--

3) A-t-on $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel ? Justifier la réponse.

On a $f(0) = \sqrt{3}$ et (valeurs trigonométriques usuelles) $f(0 + 2\pi) = f(2\pi) = \sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$
par suite $f(x + 2\pi)$ n'est pas égal à $f(x)$ pour tout réel x .

4) Calculer la moyenne de f sur $[0; \pi]$.

<p>Soit m la moyenne de f sur $[0; \pi]$, F une primitive de f,</p> <p>alors (th.1 et th.2) $m = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{1}{\pi} (F(\pi) - F(0))$</p> <p>Or $f(t) = \sqrt{3} \cos \frac{t}{3} - \sin \frac{t}{3}$ donc (th.3) on peut choisir</p> <p>$F(t) = 3\sqrt{3} \sin \frac{t}{3} + 3 \cos \frac{t}{3}$,</p> <p>d'où $m = \frac{1}{\pi} \left[\left(3\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left(3\sqrt{3} \sin \frac{0}{3} + 3 \cos \frac{0}{3} \right) \right]$</p> <p>soit (lignes trigonométriques usuelles),</p> <p>$m = \frac{1}{\pi} \left[\left(3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{1}{2} \right) - (3\sqrt{3} \times 0 + 3 \times 1) \right] = \frac{3}{\pi}$</p>	<p>Th. 1 et déf. : valeur moyenne m d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) : $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.</p> <p>Th.2 : Si $F' = f$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.</p> <p>Th.3 : $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$ $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$</p>
--	---

Exercice III : autour de l'étude d'une fonction.

Partie A

1) Ecrire les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$.	Sur \mathbf{R} , $y(x) = ke^{-3x}$
---	--------------------------------------

Eléments pour un corrigé.

2)a) Pour qu'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (a, b et c constantes réelles) soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il suffit que a, b et c soient solution d'un système d'équations. Ecrire ce système.	$\begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + 3b = -4 \\ b + 3c = -11 \end{cases}$
2)b) Définitions, propriétés ou théorèmes essentiels utilisés pour trouver ce système.	Définition d'une solution d'une équation différentielle. Propriétés élémentaires de dérivation (somme, produit par une constante, ...) Egalité de deux polynômes.

Partie B

On admet que pour qu'une fonction f soit solution de l'équation $y' + 3y = 3x^2 - 4x - 11$, il faut et il suffit que $g(x) = ke^{-3x} + x^2 - 2x - 3$. On appelle C la courbe représentative de g.

3) Quelle est l'ordonnée du point de C d'abscisse 0 ?	$k - 3$
---	---------

4) Etude des variations de $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 - 2x - 3$. On admet que, pour tout x réel, $f'(x) = -9e^{-3x} + 2x - 2$.

- a) Une étude permet d'obtenir le tableau ci-contre (f' est strictement croissante, s'annule une et une seule fois en α , et $\alpha \in [0 ; 2]$, ...).
Présenter une telle étude en justifiant à l'aide des théorèmes clés.

Valeurs de x	$-\infty$ 0 α 2
Sens de variations de $f'(x)$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$ 0 $+$

<p>Pour tout x de \mathbf{R}, $f''(x) = 9e^{-3x} + 2$ (th.1), donc (th.2), pour tout x de \mathbf{R}, $f''(x) > 0$, et par suite f' est strictement croissante sur \mathbf{R}. De plus (th.3) $f'(0) = -11$ et $f'(2) = -9e^{-6} + 2 \approx 1,9$. La fonction f' étant dérivable, strictement croissante sur $[0 ; 2]$, et $f'(0) \times f'(2) < 0$ alors (th.4) il existe un unique α de $]0 ; 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. La fonction f' étant strictement croissante sur \mathbf{R}, si $x < \alpha$ alors $f(x) < f(\alpha)$ donc si $x < \alpha$ alors $f(x) < 0$; de même si $x > \alpha$ alors $f(x) > 0$. D'où le signe de f', et f' ne s'annule pour aucune autre valeur que α.</p>	<p>Th.1 : $(e^u)' = u'e^u$. Th.2 : pour tout réel a, $e^a > 0$ Th.3 : $e^0 = 1$ Th.4 : si une fonction g est dérivable et strictement monotone sur $[a ; b]$ ($a < b$) et si $g(a) \times g(b) < 0$, alors il existe un unique α de $]a ; b[$ tel que $g(\alpha) = 0$.</p>
b) Ecrire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .	$1,14 < \alpha < 1,15$

c) Pour calculer les limites de f aux bornes, on écrit, pour $x \neq 0$, $f(x) = 3e^{-3x} + x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$.

Limites	Théorèmes (avec précision) : par exemple				
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	<p>Th.1 : limite par changement de variable $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t$</p> <p>ths.2 : limites aux bornes des fonctions de référence $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$</p> <p>ths.3 : limite d'une somme, d'un produit</p>				
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	<p>Th.1 : limite par changement de variable $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t$</p> <p>ths.2 : limites aux bornes des fonctions de référence $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$</p> <p>ths.3 : limite d'une somme, d'un produit</p>				
e) Ecrire le tableau des variations de f.	Valeurs de x	$-\infty$	α	$+\infty$	et $f(\alpha) \approx -3,88$
	Variations de f	$+\infty$		$+\infty$	
		\searrow	\nearrow	$f(\alpha)$	

Partie C

On appelle E la partie du plan comprise entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -0,5$ et $x = 0,5$.

5) Quels théorèmes « clés » permettent de calculer le nombre d'unités d'aire de E ?	<p>Th.1 : Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[a ; b]$ ($a < b$), alors le nombre d'unités d'aire u de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, C_f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par $u = \int_a^b f(x) dx$.</p> <p>Th.2 : (relation de Chasles) si f est dérivable sur $[a ; c]$ sur $[c ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$</p> <p>Th.3 : Si $F' = f$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.</p>		
6)a) Ecrire une primitive F de f.	$-e^{-3x} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$	6)b) Théorèmes utilisés pour calculer F ?	Th.4 : $(e^u)' = u'e^u$ th.5 : $(x^n)' = nx^{n-1}$
7) Entourer (en complétant éventuellement) la troncature à la deuxième décimale du nombre d'unités d'aire de E :	a) 5,20 b) 3,20 c) 2,10 d) 1,34	e) autre(à compléter)	