

NOM :

ENONCE ET FEUILLE REPONSE

Respecter les consignes

Soit la courbe C d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- 1) Les deux fonctions x et y ont une période commune.
Laquelle ?

- 2) Comparer, en justifiant, $x(\pi - t)$ et $x(t)$ d'une part puis $y(\pi - t)$ et $y(t)$ d'autre part.

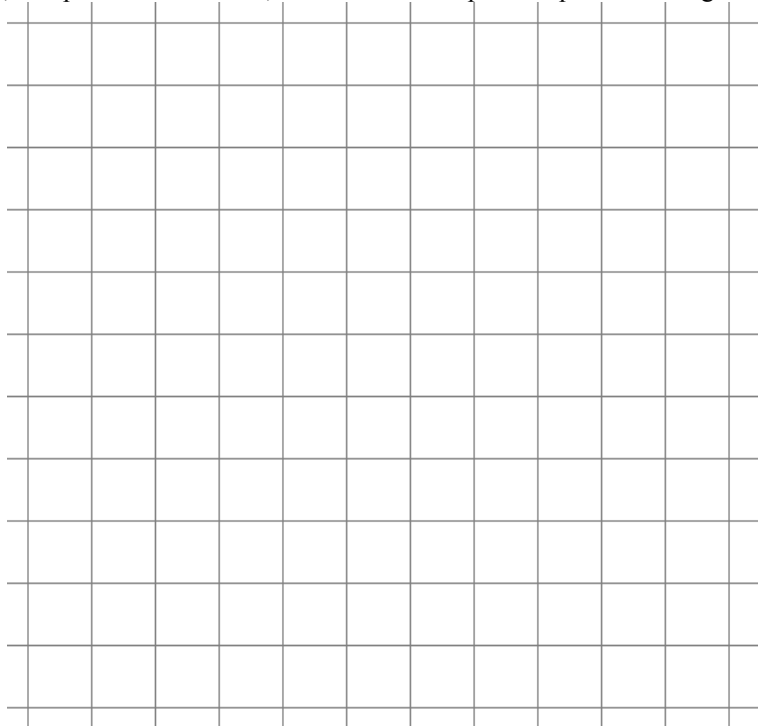
Compte tenu de 1) et 2), l'étude des variations sera faite sur un intervalle J.

- 3) Présenter le tableau des variations conjointes de x et de y sur J (on ne demande là aucune justification).

- 4) Présenter **au dos de cette feuille** une étude justifiée du signe de $y'(t)$ sur J.

- 5) Ecrire les coordonnées des
vecteurs directeurs des tangentes
aux points « charnières » de C.

- 6) Représenter C ci-dessous, le repère étant au choix, mais doit être adapté. Les parties de tangentes utiles seront dessinées.



NOM :

ENONCE ET FEUILLE REPONSE

Respecter les consignes

Soit la courbe C d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = (t+1)e^{-t} \\ y(t) = t^2e^{-t} \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

- 1) Ecrire les formes adaptées de $x'(t)$ et de $y'(t)$ pour l'étude de leurs signes.

- 2) Présenter le tableau des variations conjointes de x et de y sur J (on ne demande là aucune justification).

- 3) Ecrire les coordonnées des vecteurs directeurs des tangentes aux points « charnières » de C.

- 4) Représenter C ci-dessous, le repère étant au choix, mais doit être adapté. Les parties de tangentes utiles seront dessinées.



Eléments pour un corrigé

Soit la courbe C d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

1) Les deux fonctions x et y ont une période commune. Laquelle ?

2π

2) Comparer, en justifiant, $x(\pi - t)$ et $x(t)$ d'une part puis $y(\pi - t)$ et $y(t)$ d'autre part.

Par abus d'écriture, pour tout t, $x(\pi - t) = \cos(\pi - t) = -\cos t = -x(t)$ (th.1)

Th.1 : pour tout réel a, $\cos(\pi - a) = -\cos a$
et $\sin(\pi - a) = \sin a$

$$\text{et } y(t) = \frac{\sin^2(\pi - t)}{2 + \sin(\pi - t)} = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} = y(t) \text{ (th.1)}$$

Compte tenu de 1) et 2), l'étude des variations sera faite sur un intervalle J.

3) Présenter le tableau des variations conjointes de x et de y sur J (on ne demande là aucune justification).

Remarque : la réponse à la question 1) permet de réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π .

La réponse à la question 2) montre une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées quand on remplace t par $\pi - t$, on pourrait donc réduire l'étude à un intervalle de longueur π , avec l'une des bornes égale à $\pi/2$: cependant, la connaissance employée est en dehors des programmes de BTS, l'intervalle d'étude utilisé sera $[0 ; 2\pi]$.

Valeurs de t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Signe de $x'(t)$	0	-	0	+	0
Variations de x	1	\searrow	0	\nearrow	1
Variations de y	0	\nearrow	1/3	\searrow	0
Signe de $y'(t)$	0	+	0	-	0

4) Présenter une étude justifiée du signe de $y'(t)$ sur J.

Pour tout réel t, par abus d'écriture, on a (ths 2 et 3) :

$$y'(t) = \left(\frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \right)' = \frac{2 \sin t \cos t (2 + \sin t) - \cos t \sin^2 t}{(2 + \sin t)^2} = \frac{\sin t \cos t (4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}.$$

$$\text{Th.2 : } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Th.3 : pour tout réel t, $(\sin t)' = \cos t$

On en déduit, par exemple, le tableau de signes suivant sur $[0 ; 2\pi]$, en s'appuyant sur les signes connus de sinus et de cosinus :

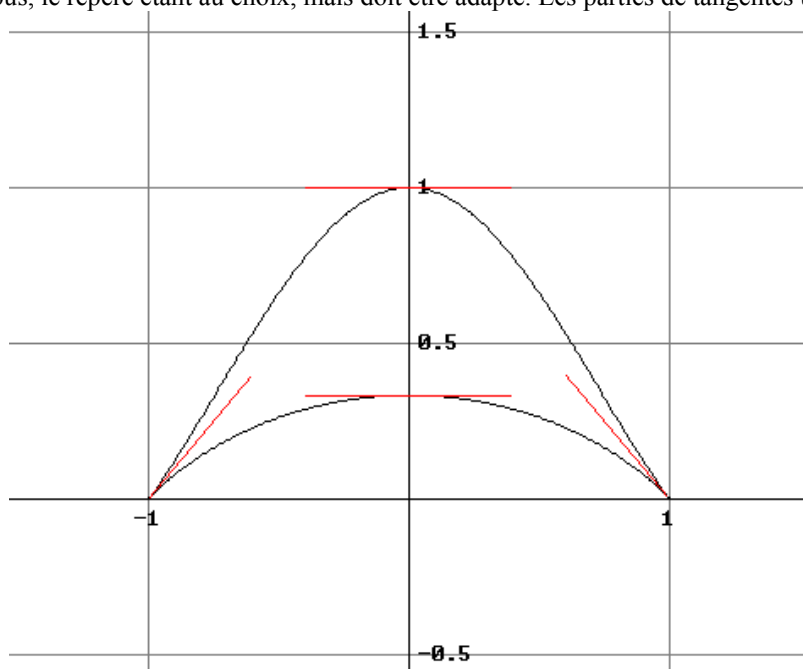
Valeurs de t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Signe de $\sin t$	0	+	0	-	0
Signe de $\cos t$	+	0	-	0	+
Signe de $4 + \sin t$	+	+	+	+	+
Signe de $(2 + \sin t)^2$	+	+	+	+	+
Signe de $y'(t)$	0	+	0	-	0

Th.4 : pour tout réel t, $-1 \leq \sin t \leq 1$

5) Ecrire les coordonnées des vecteurs directeurs des tangentes aux points « charnières » de C.

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\pi/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{3\pi/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6) Représenter C ci-dessous, le repère étant au choix, mais doit être adapté. Les parties de tangentes utiles seront dessinées.



Eléments pour un corrigé

Soit la courbe C d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = (t+1)e^{-t} \\ y(t) = t^2e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

- 1) Ecrire les formes adaptées de $x'(t)$ et de $y'(t)$ pour l'étude de leurs signes.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -te^{-t} \\ y'(t) &= (2t - t^2)e^{-t} (= t(2 - t)e^{-t}) \end{aligned}$$

- 2) Présenter le tableau des variations conjointes de x et de y sur J (on ne demande là aucune justification).

Valeurs de t	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
Signe de x'(t)	+	0	-	-			
Variations de x	$-\infty$	\nearrow	1	\searrow	$3e^{-2}$	\searrow	0
Variations de y	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$4e^{-2}$	\searrow	0
Signe de y'(t)	-	0	+	0	-		

- 3) Ecrire les coordonnées des vecteurs directeurs des tangentes aux points « charnières » de C.

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Représenter C ci-dessous, le repère étant au choix, mais doit être adapté. Les parties de tangentes utiles seront dessinées.

